PONTIFICIA UNIVERSITAS GREGORIANA

PHILIPPUS SOCCORSI S. I.

QUAESTIONES SCIENTIFICAE
CUM PHILOSOPHIA CONIUNCTAE

DE GEOMETRIIS ET SPATIIS NON EUCLIDEIS

ROMAE
APUD AEDES UNIVERSITATIS GREGORIANAE
1960

EIUSDEM AUCTORIS:

Quaestiones Scientificae cum Philosophia Coniunctae

DE PHYSICA QUANTICA, 1956

DE VI COGNITIONIS HUMANAE IN SCIENTIA PHYSICA, 1958

PONTIFICIA UNIVERSITAS GREGORIANA

PHILIPPUS SOCCORSI S. I.

QUAESTIONES SCIENTIFICAE
CUM PHILOSOPHIA CONIUNCTAE

DE GEOMETRIIS ET SPATIIS NON EUCLIDEIS

Wilson P. C. de Mesquita

ROMAE
APUD AEDES UNIVERSITATIS GREGORIANAE
1960

IMPRIMI POTEST

Romae, die 10 maii 1960.

R. P. PAULUS MUÑOZ VEGA, S. I.
Rector Universitatis

IMPRIMATUR

E Vicariatu Urbis, die 13 maii 1960.

† HECTOR CUNIAL
Archiep. tit. Soteropolit. Vicesgerens

TYPIS PONTIFICIAE UNIVERSITATIS GREGORIANAE - ROMAE

PROOEMIUM

Geometriae non euclideae plus quam unam quaestionem philosophicam agitaverunt. Posuit primum nucleum disceptationis postulatum illud quintum Euclidis, definiens proprietates rectarum parallelarum, quod inde ab antiquitate visum est carere sufficienti claritate et quod plures auctores conati sunt — in irritum tamen — declarare et comprobare.

Orta igitur est in primis quaestio logica : utrum necne affirmatio euclidea demonstrari possit, ratione solum habita de ceteris principiis quae Euclides posuerat ante postulatum de parallelis.

Laboriosa discussio problematis ad exitum deducta est cum constructae sunt aliae geometriae « non euclideae » quae componunt priores propositiones principiorum Euclidis cum proprietate contraria postulato quinto.

Ut tale argumentum controversiam dirimat, geometriae non euclideae probandae sunt constituere systemata plane logica, immunia a quavis interna contradictione ; quae comprobatio, etsi iam efficaciter adumbrata opera priorum auctorum geometriae non euclideae (Gauss, Lobačewski, Bolyai) et magis declarata opera Beltrami, non tamen plene absolvitur his solis studiis. Praeterea hi auctores non produxerunt nisi unam geometriam non euclideam, « hyperbolicam » denominatam, quae postulat per quodvis punctum binas distinctas parallelas deduci posse cuivis tertiae rectae ; neglexerunt vero aliam possibilem formam, geometriam scilicet « ellipticam », quae negat dari rectas parallelas quae nullibi mutuo se secent. Riemann nova methodo iecit fundamenta geometriae et collegit omnem possibilem varietatem geometriarum. Quodvis dubium tandem circa logicam cohaerentiam systematum non

euclideorum dissolverunt nonnullae eorum interpretationes: definita scilicet entia geometrica, quae certo immunia dicenda sunt ab interna contradictione, et quae exhibent omnes proprietates spatiorum non euclideorum; inter quae entia, ea praesertim notanda sunt, quae Cayley et Klein produxerunt iuxta methodos geometriae proiectivae: ipsa enim plus quam merae interpretationes geometriae non euclideae, dicenda sunt simpliciter constituere — et quidem pari iure — tres possibiles geometrias, quarum una est euclidea et duae non euclideae, altera hyperbolica altera elliptica.

Solutio problematis logici novam et graviorem quaestionem philosophicam posuit, quae dici potest « quaestio critica ».

Communis enim sensus hominum — quasi evidenti intuitione ductus — sponte iudicat necessariam geometriam euclideam; decipitur ergo; quare etiam fallaces dicendae sunt intuitiones quae dicuntur evidentes; et severiora criteria critica requiruntur ut praecaveantur errores.

Hoc problema posuerunt non solae geometriae non euclideae, sed etiam nonnulla paradoxa, quae causa fuerunt ut ad examen criticum revocarentur fundamenta ipsius matheseos.

Institutae propterea sunt novae methodi criticae et novae logicae: severior methodus assiomatica respuit propositiones primas per se evidentes et, dum statuit sua principia, non attendit ad eorum significationem intuitivam, sed unice ad eorum mutuas relationes logicas quae ex conventione statuuntur; nova etiam logica constructa est, « logistica » denominata, cuius methodi analogiam exhibent cum operationibus mathematicis; denique systemata mere « formalia » et methodus formalis constituunt summam expressionem novae « metalogicae ».

Tertium denique problema est physicum. Si plus quam unum systema geometricum logice cohaerens construi potest, quodnam dicendum est congruere cum natura mundi physici? qualis scilicet geometria dici potest vera?

Iam Gauss et Lobačewski sibi proposuerant hanc quae-

stionem; consideraverunt propterea quosdam amplissimos triangulos, terrestres et astronomicos (radiis lucis constituentibus eorum latera), et mensuraverunt eorum angulos: diversae enim geometriae assignant diversas summas angulis triangulorum: geometria euclidea illam aequat duobus angulis rectis; geometria vero elliptica postulat summam excedentem duos rectos, et geometria hyperbolica postulat excessum negativum, seu summam angulorum non attingentem duos rectos; utraque denique geometria non euclidea praevidet excessum angulorum (positivum aut negativum) respectu summae euclideae, qui crescit una cum area triangulorum; quare illud discrimen, quod non discernimus mensurando conseutos triangulos, potest fortasse patescere si trianguli valde extenduntur: hac ratione iudicium de geometria vera committitur experimentis. Tamen trianguli a Gauss et Lobačewski mensurati nondum manifestaverunt indubium excessum angulorum, qui referri non posset ad parvos et necessarios errores mensurarum; quare hi auctores quaestionem reliquerunt insolutam, illam committendo futuris et perfectioribus investigationibus astronomicis.

Respondit vero primo huic quaestioni theoria relativitatis: spatium physicum, cuius naturales lineae breviores constituuntur radiis lucis, dicendum est practice euclideum — seu « planum » — si absunt notabiles massae materiae; fit vero non euclideum — seu « curvum » — si adsunt magnae massae materiae.

Exacta significatio huius positionis theoriae relativitatis nequit in praesenti paucis declarari; notemus tantum naturam non euclideam spatii physici haberi pro re certa: contrarium asserere — aiunt periti — idem esset ac loqui de forma plana et non sphaerica terrae. Extra dubium ceteroquin est theoriam relativitatis se exhibere sub veste geometrica, et adhibere geometriam non euclideam. Quare studia de geometriis non euclideis, quae iudicari poterant abstractae tractationes mathematicae, arcte copulata sunt cum studiis de phaenomenis physicis.

Ipsa denique vestis geometrica theoriae relativitatis ido-

neum instrumentum analyticum suppeditavit, cuius auxilio Einstein et plures alii auctores aggressi sunt audacem investigationem de forma et de evolutione totius universi galactici. Plures solutiones problematis prospectae sunt ; communius vero fit sermo de universo « hypersphaerico » (non euclideo), finito, sed nullo termine limitato, utpote clausum in seipsum ad instar superficiei sphaericae.

Hae novae cosmologiae, propter suam ipsam nativam indolem (quam hauriunt ex theoria relativitatis), non sunt staticae, sed notam dynamicam exhibent, cuius gratia aptissimae inventae sunt quae describerent novum et mirum inventum astronomicum : expansionem scilicet universi galactici, quae continuo et ingenti velocitate producitur.

* * *

Quid de his omnibus sentiendum est ?

Conclusiones, quibus absolvitur haec nostra tractatio (Pars IV), ad sequentia puncta breviter revocari possunt :

I. Postulatum V Euclidis non est unicum quod logice proponi possit ; admissa vero propositione contraria (quae bifaria est), construuntur duae geometriae non euclideae, quae sunt systemata logice cohaerentia.

Nequit igitur demonstrari postulatum V ratione habita de propositionibus euclideis quae praecedunt ipsum postulatum ; colliguntur vero geometriae diversae pro diversis proprietatibus particularibus quae adduntur nonnullis principiis communibus.

Plures insignes auctores (quorum nomina iam supra indicavimus) suam operam huic problemati dederunt ; sed eorum studia non pari vi solvunt quaestionem et non semper sub omni aspectu ; nonnullae igitur animadversiones praetermittendae non erunt : eae nominatim quae perpendunt (praeter proprietates « metricas ») proprietates « topologicas » spatiorum non euclideorum.

II. Novae methodi criticae et novae logicae non sine merito et fructu institutae sunt et excoluntur; infirmantur nihilominus et in nonnulla vitia philosophica incurrunt (ut in conventionalismum, nominalismum, vacuum logicismum qui solum discurrit et nihil umquam affirmat) si nimis excludunt significationes conceptuum et iudiciorum, quae non absolvuntur solis symbolis et nominibus et eorum mutuis relationibus logicis.

Plena discussio huius quaestionis amplissima est, sed manet extra ambitum nostri propositi; quare nonnisi brevis mentio de ea fiet. Quod nominatim attinet ad geometrias non euclideas plenius tractabitur; en conclusiones:

Nequeunt in primis geometriae non euclideae argumentum constituere contra criteria evidentiae: exemplum enim ponunt quaestionis quae, prius non clara et insoluta, tunc soluta est cum, ex omni parte satis declarata, evidens tandem facta est.

Neque geometriae non euclideae favent cuidam exaggerato logicismo, qui contendat seponere omnem significationem intuitivam conceptuum: ipsae enim geometriae non euclideae constructae et comprobatae sunt auxilio talium intuitionum. Quae condicio plane consona est cum interna limitatione methodi formalis: ut comprobatum est, nequeunt ex toto excludi cognitiones intuitivae, quae, praetergredientes signa symbolica, attingunt eorum significationes.

Tandem aestimanda non est tragica illa communis propensio hominum ad iudicandam necessariam geometriam euclideam: cum enim ita iudicant semper supponunt (praeter proprietates quas explicite enunciant communia principia geometriae) etiam peculiares illas condiciones quae revera postulant geometriam euclideam. Quod factum generatim negligitur cum de his quaestionibus agitur.

III. Iudicia de geometria quae dici possit « vera » non sine aequivocationibus passim proferuntur; adeo ut etiam auctores magni nominis locutiones adhibeant quibus videntur sententias contrarias tenere.

Rem autem efficaciter illustrant theoria relativitatis (gene-

ralis) et novae cosmologiae ex ipsa theoria deductae ; hae omnes theoriae declarant quo pacto concipere possimus spatia physica non euclidea.

Spatium non euclideum semper dicendum est « curvum » ; sed eius « curvatura » — sollicite admonent auctores — nullum mysterium proponit : absolvitur enim per peculiares relationes algebricas inter nonnullas mensuras (angulorum et arearum), et inepte refertur ad aenigmaticam flexionem totius spatii tridimensionalis concipiendam ad instar flexionum superficierum curvarum. Quod verissimum est et prae oculis habendum cum agitur de spatio « curvo » theoriae relativitatis generalis. Hoc tamen non impedit quominus in peculiaribus adiunctis (quae accurate declarabuntur) curvatura spatii non euclidei postulet etiam eius flexionem respectu quartae dimensionis externae eidem spatii. Quae condicio praetermittenda non est cum indagatur de variis possibilibus formis totius universi.

Ceterum quaestio de forma totius universi aperta manet pluribus de causis : attendendum interim est ad observationes astronomicas.

Ut de omnibus his quaestionibus iudicare valeamus plures accuratae notitiae requiruntur de geometriis non euclideis, de theoria relativitatis, de novis cosmologiis ; quas materias exponunt partes I, II et III huius libri.

Non requiruntur quidem ad nostrum finem amplae et difficiliores tractationes mathematicae horum capitum scientiae, et nominatim notiones de arduo instrumento calculi proprio theoriae relativitatis ; praetermitti tamen nequeunt nonnullae expressiones mathematicae, quarum intellectio ceteroquin facilis redditur quatenus eaedem proprietates spatiorum non euclideorum quae mathematice exprimendae erunt etiam graphice repraesentabuntur : possunt enim describi velut per chartas geographicas sicut proprietates metricae et configurationis globi terrestris exprimuntur per varias eius repraesentationes supra chartas planas ; et expressiones mathematicae, quae nobis considerandae erunt, idem significant ac « scha-

lae » applicandae chartis geographicis, ut supra ipsas legamus extensiones proprias superficiei terrestris.

Haec ipsa analogia cum chartis geographicis illustrabit etiam theoriam relativitatis, quae tota exhibetur sub veste geometrica.

In nonnullis appendicibus collecta sunt supplementa varia de geometria analytica, proiectiva et riemanniana, de numeris imaginariis et complexis et de peculiaribus functionibus quibus geometria non euclidea speciatim utitur.

PARS I

Postulatum Euclidis de rectis parallelis et problema quod ipsum postulatum posuit

Caput I

DE SAECULARI HISTORIA PROBLEMATIS USQUE AD PROFUNDIORA STUDIA FRIDERICI GAUSS

1. Enunciatum postulati.

Elementa Euclidis (300 a. C. n.) exordium ducunt a nonnullis principiis, e quibus sequentes propositiones colliguntur methodo logico-deductiva; principia ipsa dividuntur in tres series propositionum, in *definitiones* scilicet, *axiomata* et *postulata** ; *ultima autem propositio est famosum postulatum V de rectis parallelis*, quod ita enunciatur :

---

* *Definitiones* : sunt propositiones non mere nominales ; sed describunt entia geometrica adhibendo verba, quorum significationes supponuntur notae ; saepe hae descriptiones (velut « definitiones operativae ») in mentem ordinatim revocant rationes et processus quibus variae ideae gignuntur.

Axiomata, seu *notiones communes* : agitur de propositionibus, quibus enunciantur vel immediata iudicia analytica (spectantia nominatim totum, partes, aequalitatem) vel proprietates quas conspicimus in obiectis intuitionis sensibilis (ex. gr. : duo circuli, quorum uterque transit per centrum alterius, mutuo se secant).

Notandum autem est non omnes propositiones, quae in demonstrationibus adhibentur ut manifesto verae, explicite enunciari inter principia.

Postulata, quae apud Euclidem exhibent characterem « existentialem-constructivum » : enunciantur scilicet res quae dicuntur vere dari et quae construi possunt ; Proclus (410-435 p. C. n.) animadvertit postulata se habere ad axiomata sicut problemata (quae solvuntur constructionibus) se habent ad theoremata (quibus enunciantur proprietates).

Notanda sunt quatuor prima postulata, cum quibus quintum (de parallelis) arcte nectitur :

I. Inter quaelibet duo puncta duci potest una linea recta.

II. Quaelibet recta terminata potest in indefinitum protrahi.

III. Dato quolibet centro et quolibet radio, potest describi circulus.

IV. Omnes anguli recti sunt aequales inter se (aspectus constructivus huius postulati minus conspicuus est).

Discrimina supra notata inter axiomata et postulata ea sunt

Si recta, secans alias duas rectas, cum ipsis efformat (ab eodem latere) tales angulos internos quorum summa minor sit quam duo anguli recti, duae illae lineae rectae, satis productae, mutuo se secant ; earum autem punctum commune ab eadem parte stat ac illi anguli interni quorum summa minor est duobus rectis.

Quod postulatum *affirmat per quodvis punctum* P , *externum rectae* r , *semper duci posse unam (et nonnisi unam) rectam* p *parallelam rectae* r ; indicantur praeterea peculiares condiciones quibus obtemperant anguli, quod quaevis binae rectae iacentes in eodem plano (parallelae et non parallelae) efformant cum tertia recta secante.

Haec positio, procul dubio non simplex, speciem potius exhibet theorematis demonstrandi quam veritatis per se manifestae ; tamen Euclides illam simpliciter enunciat, non addendo ullam declarationem. Sensit vero et ipse defectum evidentiae suae propositionis, quam ultimatim admisit inter principia, et quam etiam — quantum fieri poterat — conatus est non adhibere in sequentibus demonstrationibus : quare priores 28 propositiones libri I (quibus absolvitur tota eius prima pars) non pendet ex postulato V ; item peculiaris propositio, spectans relationem inter angulum externum triangulorum et angulos internos, dividitur in duas partes, quarum prior (« angulus externus maior est quovis angulo interno non adiacente »), quae demonstratur sine auxilio postulati V, ponitur inter 28 propositiones (propos. 16ª) ; altera vero pars (« angulus externus aequat summam duorum angulorum internorum non adiacentium »), cuius probatio indiget postulato V, non includitur in prima parte libri (propos. 32ª).

---

quae communiter referunt studia critica nostri temporis de principiis geometriae euclideae. Praetermittendum vero non est illud discrimen quod Aristoteles notaverat et quod negligi non potuit ab Euclide : axiomata sunt propositiones per se evidentes ; postulata vero (velut hypotheses) non sunt propositiones per se evidentes ; quare consensus « postulatur » ut consectaria colligi possint (cfr. Selvaggi, *Filosofia delle scienze*, ediz. « Civiltà Cattolica », p. 128).

2. Propositiones aequipollentes postulato euclideo.

Si postulatum V euclideum admittitur, facile ex eo deducuntur (ut geometria elementaris docet) nonnullae aliae proprietates, quae sunt :

— *rectae parallelae sunt rectae aequidistantes ;* vel : lineae aequidistantes a linea recta sunt et ipsae totidem lineae rectae.

— *quivis quadrangulus, cuius tres anguli sint recti, necessario absolvitur quarto angulo et ipso recto.*

— *summa angulorum triangulorum aequat duos angulos rectos.*

— *dantur figurae similes* (in primis triangulis), quarum anguli homologi sunt aequales, extensiones vero (linearum et arearum) diversae.

— *describi possunt in plano duo systemata rectarum orthogona inter se.*

Vicissim, si admittitur vel una ex dictis propositionibus, postulatum euclideum necessaria consecutione colligitur.

Tales propositiones, vere aequipollentes postulato V, non semel visae sunt clariores quam propositio euclidea ; quare *plures auctores proposuerunt unam ex illis ponendam esse inter principia geometriae pro postulato euclideo de rectis parallelis.*

Iam *Posidonius* (I saec. a. C. n.), ut refert Proclus, proposuerat introducere rectas parallelas tamquam eas rectas quae, iacentes in eodem plano, servant invariatam suam mutuam distantiam ; sed haec definitio postulat lineam aequidistantem a recta esse et ipsam lineam rectam ; quae propositio revera non clarior est quam postulatum euclideum.

Proclus (410-435 p. C. n.) parem propositionem statuit ; scilicet : « distantia rectarum quae mutuo se secant crescit ; distantia rectarum parallelarum invariata permanet.

Nasir Eddin (1201-1274), primarius inter commentatores arabes Euclidis, analoga ratione consideravit condiciones sub quibus crescit aut imminuitur distantia inter duas rectas secantes tertiam rectam.

P. A. *Castaldi* (m. 1626) conatus est magis declarare postulatum de rectis aequidistantibus adhibendo nonnullas analogias.

Giordanus Vitale (1633-1711) animadvertit postulatum V iam demonstrari posse si admittimus tria puncta aequidistantia ab una

recta iacere et ipsa iuxta unam rectam; quae positio ad praecedentes revocari potest.

Wallis (1616-1701) propositionem novam proposuit, spectantem similitudinem figurarum: data qualibet figura — ipse affirmavit — alia similis construi potest (exhibens scilicet invariatos angulos), cuius magnitudo tamen ad libitum variari potest. Haec propositio et postulatum euclideum revera mutuo se inferunt; sed utrique propositioni pariter deest sufficiens claritas.

Haec reiterata studia non ponendi postulatum V euclideum inter prima principia geometriae manifesto denuntiant defectum evidentiae huius propositionis; ipsa studia vero in irritum ceciderunt cum non valuerint proponere novam propositionem vere evidentiorem; non caruerunt tamen quovis fructu: in lucem enim posuerunt nonnullos logicos nexus inter varias propositiones, sive euclideas sive non euclideas.

Notetur in primis peculiaris condicio quae colligitur ex opere Wallis: si postulatum V supponitur non stare, figurae similes iam dicendae sunt impossibiles; quare agnoscendus est peculiaris nexus inter formam et extensionem figurarum. Quae condicio viget ceteroquin in geometria sphaerae; quae propterea adhiberi potest ad illustrandam hanc proprietatem non euclideam: in sphaera quivis triangulus geodeticus, cuius anguli $A\ B\ C$ determinati sint, necessario postulat definitam aream, quae est:

$$\text{Area trianguli} = R^2\,(A + B + C - \pi)$$

in qua formula R denotat radium sphaerae, et

$$(A + B + C - \pi)$$

excessum angulorum supra π (qui excessus dicitur « excessus geodeticus »).

Haec formula ostendit non dari supra sphaeram figuras similes et nominatim triangulos similes: si enim area trianguli augetur, pari ratione crescit etiam eius excessus geodeticus, et forma trianguli necessario variatur una cum summa eius angulorum. Maxima area triangularis habetur cum triangulus congruit cum ipsa dimidia sphaera: quod contingit cum

tres vertices trianguli geodetici pertinent uni eidemque circulo maximo sphaerae; tunc singuli anguli A, B, C aequant duos rectos; quare stant sequentes aequalitates:

$$\text{Excessus geodeticus} = 3\pi - \pi = 2\pi$$

$$\text{Area semisphaerae} = 2\pi R^2$$

Si de geometria sphaerae agitur, ipse radius R est illa peculiaris dimensio quae nexum ponit inter extensionem et formam figurarum; quod si ipse radius assumitur ut unitas mensurae, colliguntur formulae simpliciores:

$$\text{Area trianguli} = A + B + C - \pi = \text{Excess. geodet.}$$

$$\text{Area semisphaerae} = \text{Excess. geodet.} = 2\pi$$

Simili ratione, si in geometria plani propositio euclidea supponitur non stare, singulare privilegium agnoscendum est cuidam peculiari dimensioni (comparandae cum radio sphaerae) *quae nexum instituat inter formam et extensionem figurarum;* quod si haec ipsa dimensio assumitur ut unitas mensurae, formulae exprimentes extensionem figurarum acquirere debent peculiarem simplicitatem.

Item alia peculiaris condicio notanda est, quae utile criterium constituit quo dignoscamus utrum stet necne geometria euclidea. Quae condicio colligitur ex proprietatibus euclideis de aequidistantia rectarum parallelarum et de summa angulorum, quos efformat recta secans rectas parallelas. Haec condicio ita enunciari potest:

condicio, necessaria et sufficiens, inferens geometriam euclideam haec est: *planum ita transferri potest supra seipsum, iuxta duas directiones orthogonas, ut puncta plani describant duo systemata traiectoriarum orthogona inter se.*

Quae propositio in duas partes dividi potest:

a) si stat postulatum euclideum, planum certe transferri potest supra seipsum (iuxta duas directiones orthogonas) ut eius puncta describant duo systemata orthogona traiectoriarum;

b) vicissim, si duae translationes plani supra seipsum iuxta duas directiones orthogonas producunt duo systemata orthogona traiectoriarum, postulatum V euclideum necessario colligitur.

Probatur prior pars :

Posito postulato V, describi possunt in plano duae rectae orthogonae x, y necnon duo systemata rectarum $x_1 x_2 x_3 \ldots$ $y_1 y_2 y_3 \ldots$ parallelarum ipsis axibus x, y.

Quae duo systemata rectarum (stante postulato V) sunt etiam systemata linearum aequidistantium ab axibus x et y ; quare congruunt cum traiectoriis, quas varia puncta plani percurrunt si planum ita transfertur (modo rigido) supra seipsum ut in primis transferantur supra seipsos (duabus distinctis translationibus) axes x et y : translatio enim rigida invariatas servat mutuas distantias variorum punctorum ; quare lineae aequidistantes ab axibus x aut y (seu dicta systemata rectarum parallelarum) sunt ipsae traiectoriae quas puncta plani describunt in dictis translationibus.

Dari igitur possunt, in translationibus plani euclidei supra seipsum, duo systemata traiectoriarum orthogona inter se.

Probatur altera pars :

Planum supponitur transferri posse supra seipsum iuxta duas rectas orthogonas x, y ; praeterea, per has ipsas translationes puncta plani supponuntur describere duo systemata orthogona traiectoriarum (inter quas traiectorias stant in primis ipsi axes x, y, iuxta quos transferuntur eorum puncta).

Ut colligatur postulatum Euclidis sufficit ut traiectoriae illae (unius eiusdemque systematis) probentur esse lineae aequidistantes et rectae.

Manifesto autem dicendae sunt in primis lineae aequidistantes, quia sunt totidem traiectoriae simultaneae in translatione (rigida) plani : per tales enim translationes non mutantur mutuae distantiae punctorum ; nominatim non mutantur distantiae inter puncta axis x (aut y) et cetera puncta plani percurrentes dictas traiectorias.

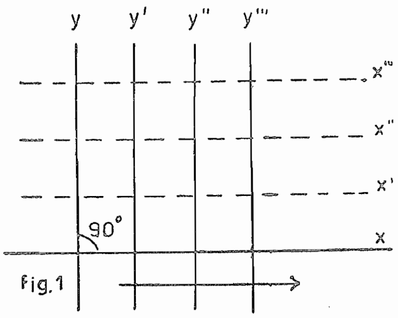


Fig. 1

Ipsae traiectoriae dicendae etiam sunt totidem lineae rectae : duo systemata traiectoriarum supponuntur esse ubique orthogona inter se ; quare lineae $x_1 x_2 x_3 \ldots$ (orthogonae lineis $y_1 y_2 y_3 \ldots$)

sunt ipsae lineae in quas transfertur axis x cum eius puncta percurrunt traiectorias $y_1\, y_2\, y_3 \ldots$ (orthogonas axi x) (fig. 1).

Pari ratione agnoscuntur esse totidem lineae rectae traiectoriae $y_1\, y_2\, y_3 \ldots$

3. Opus P. Hieronymi Saccheri.

Deficientibus demonstrationibus directis propositionis euclideae, nonnulli auctores conati sunt instituere demonstrationem indirectam, illam colligendo ex absurdis consectariis, quae ipsi putaverunt se deduxisse ex negatione postulati euclidei.

P. *Hieronymus Saccheri* (1667-1733) *scripsit opus cui titulus « Euclides ab omni naevo vindicatus : sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia ».*

Tamquam praemissae admittuntur omnes propositiones euclideae quae praecedunt postulatum V. Dein *auctor considerat quadrangulum birectangulum isoscelem* (i. e. : anguli A et B sunt recti, $AC = BD$: fig. 2). Anguli C et D (propter symmetriam figurae respectu axis centralis) necessario sunt aequales inter se.

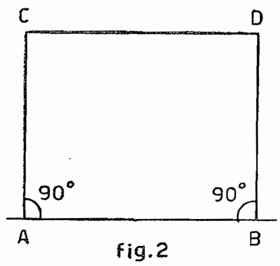


fig.2

Admisso postulato euclideo, anguli C et D dicendi sunt recti ; sed, si haec positio supponitur non necessaria, tres hypotheses perpendendae veniunt : anguli illi supponi possunt aut acuti, aut recti, aut obtusi.

Nonnullae propositiones inde logica consecutione deducuntur ; ex. gr. :

a) prout anguli supponuntur acuti, recti aut obtusi, latus CD censendum est maius, aequale aut minus quam oppositum latus AB, et vicissim.

b) si vel pro uno quadrangulo birectangulo isoscele supponitur stare una ex tribus hypothesibus, haec ipsa semper retinenda est pro quolibet alio quadrangulo birectangulo isoscele.

c) prout anguli supponuntur acuti, recti aut obtusi, sum-

ma angulorum triangulorum est minor, aequalis, aut maior quam duo recti.

Tres igitur hypotheses ad examen revocantur :

a) *hypothesis anguli recti, inferens ipsam geometriam euclideam.*

b) *hypothesis anguli obtusi, inferens tales propositiones quae vertuntur in totidem propositiones geometriae sphaerae, si pro « plano » ponitur « sphaera », et pro « recta »* (quae est linea geodetica — seu linea minimae distantiae — plani) *ponitur « circulus maximus »* (seu linea geodetica sphaerae).

Exempla rem perspicue declarant :

In plano (non euclideo) summa angulorum cuiuslibet trianguli (segmentis rectilineis compositi) maior est quam duo recti.	In sphaera summa angulorum cuiuslibet trianguli (segmentis curvilineis geodeticis compositi) maior est quam duo recti.

Area trianguli (segmentis geodeticis constituti) proportionem habet cum excessu angulorum supra duos rectos.

Triangulus maximus tunc habetur cum summa angulorum aequat sex rectos (excessus geodeticus $=$ 4 recti $= 2\pi$).

Dari nequeunt lineae rectae parallelae quae nullibi punctum commune habeant.	Dari nequeunt circuli maximi paralleli qui nullibi punctum commune habeant.
Locus punctorum aequidistantium a linea recta non est linea recta.	Locus punctorum aequidistantium a linea geodetica (circulo maximo) non est linea geodetica.
Duo puncta plani determinant unicam rectam.	Duo puncta sphaerae determinant unicam lineam geodeticam (circulum maximum).

Ultima propositio ostendit quamdam limitationem requiri ut statuatur analogia inter geometriam sphaerae et hanc geometriam non euclideam : consideranda solum est delimitata pars sphaerae, ita ut non comprehendantur puncta e diametro opposita ; haec enim non definiunt unum circulum maximum, sed infinitam seriem talium circulorum (seu linearum geodeticarum).

c) *hypothesis anguli acuti infert propositiones omnino novas ;* ex. gr. :

1) *Duae rectae eiusdem plani possunt acquirere tres diversas mutuas positiones* (fig. 3) :

— *mutuo se secant :* habent scilicet alicubi punctum commune ;

— *mutuo non se secant, et habent alicubi segmentum perpendiculare commune,* quod etiam constituit distantiam minimam inter duas rectas (quae non sunt aequidistantes) ;

— *mutuo non se secant ; nullibi vero habent sive punctum commune sive segmentum perpendiculare commune*; quo in casu distantia inter duas rectas magis ac magis decrescit (in unam determinatam directionem), sed tali ratione ut duae rectae numquam attingant punctum commune : dicendae igitur sunt rectae parallelae.

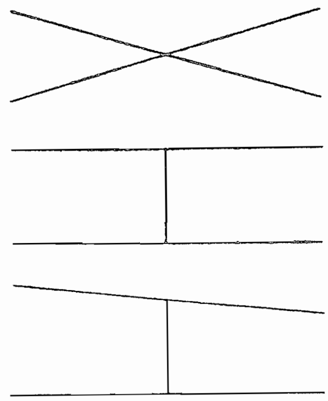


Fig. 3

2) *Assignata quadam recta r* (fig. 4), *per punctum P ipsi rectae externum ducuntur duae distinctae rectae parallelae in duas oppositas directiones.*

Hae binae parallelae separant duos fasces rectarum transeuntium per P, quarum aliae secant r, aliae non secant r.

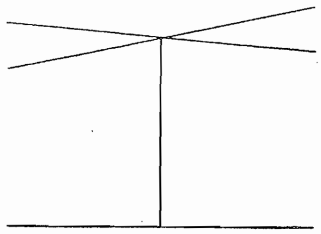


Fig. 4

Tandem Saccheri, putans se collegisse consectaria absurda sive ex hypothesi de angulo obtuso sive ex hypothesi de angulo acuto, conclusit omnem hypothesim non euclideam reiciendam esse, et solam geometriam euclideam constituere systema logice cohaerens. *Sed argumentationes Patris Saccheri non sunt sine vitio.*

Perpendens in primis hypothesim de angulo obtuso, ex ea deduxit (ut necessarium consectarium) ipsam positionem contrariam de angulo recto ; quare hypothesis ei visa est intrinsece repugnans : « seipsam destruit ». Tamen, ut deveniret ad hanc con-

clusionem supponere debuit lineam rectam esse infinitam ; quare, si seponitur etiam haec condicio (quam enunciat postulatum II Euclidis) interna contradictio systematis iam non sequitur. Declarandum vero restat quo pacto linea recta (seu linea minimae distantiae per liberum spatium) concipi possit ut linea non infinita, utpote clausa in seipsam non minus quam circulus.

Denique, ut consectarium absurdum erueret ex hypothesi de angulo acuto, P. Saccheri subtiliora ratiocinia instituerat, quae revera probanda non sunt.

Duo argumenta distinxerat. Considerans prius in linea recta punctum infinite distans, animadverterat hypothesim non euclideam postulare in hoc puncto proprietates oppositas : contactum scilicet et distantiam rectarum parallelarum ; sed, sic ratiocinans, P. Saccheri adhibuit expressionem « punctum infinite distans » perinde ac si idem significaret ac « punctum in distantia finita positum » ; praeterea non animadverterat hypothesim non euclideam assignare cuivis rectae et per quodvis punctum binas rectas parallelas, et consequenter duo distincta puncta « infinite distantia » competere unicuique parallelae pro duabus distinctis directionibus, et tandem illas proprietates oppositas referendas esse ad has duas oppositas directiones.

Secundum argumentum vertitur circa quaedam elementa linearia infinitesima : altera rectilinea, altera curvilinea ; et erronee P. Saccheri habuit pro paribus infinitesima reapse diversa.

Opus Patris Saccheri magni aestimandum est : etsi erratis argumentis pervenit ad suas ultimas conclusiones, recte tamen posuit hypotheses non euclideas, et recte ex ipsis eruit plura logica consectaria, quae revera sunt totidem propositiones geometriae non euclideae : *quare, contra suam mentem, primus evolvit tractationem geometriae non euclideae.*

4. Opus Joannis Lambert (1729-1777).

Eius tractatus *Theorie der Parallellinien* (nonnisi post eius obitum primo editus) *investigationem instituit valde similem operi Patris Saccheri ;* tractatio Lambert brevior est, sed in lucem fert quasdam novas proprietates geometriae non euclideae quae speciatim notandae sunt.

Considerans quadrangulum, cuius tres anguli sint recti,

Lambert notavit tres hypotheses concipi posse quoad quartum angulum ; quae sunt :

— *hypothesis de angulo recto*, quae congruit cum positione euclidea ;

— *hypothesis de angulo obtuso*, quam Lambert excludit ut intrinsece repugnantem (quae repugnantia stat si linea recta supponitur infinita) ;

— *hypothesis de angulo acuto* non visa est ipsi Lambert apodictice exclusa.

Evolvens hanc hypothesim Lambert prospexit eius analogiam cum geometria sphaerae ; nam :

a) certus nexus agnoscendus est inter formam et dimensionem figurarum, ita ut non dentur figurae similes (sicut contingit supra sphaeram) ;

b) summa angulorum trianguli, quae maior est quam π si de triangulis sphaericis agitur (excessus geodeticus positivus), in hac geometria non euclidea minor est quam π (excessus geodeticus negativus) ; tamen in utroque casu definita relatio stat inter aream triangulorum et excessum geodeticum (positivum aut negativum) ; et duae formulae exhibent conspicuam analogiam :

— *si de triangulis sphaericis agitur* (necnon de geometria non euclidea respondente hypothesi de angulo obtuso), *area trianguli* (Σ) *definitam proportionem servat cum excessu geodetico* (positivo) *eiusdem trianguli*, iuxta formulam :

$$\Sigma = R^2 (A + B + C - \pi)$$

— *si de hypothesi agitur anguli acuti, area trianguli proportionem servat cum defectu angulorum infra* π, iuxta analogam formulam :

$$\Sigma = R^2 (\pi - A - B - C)$$

In qua formula R denotat peculiarem dimensionem, quae pari munere fungitur ac radius in geometria sphaerae.

Quare Lambert interpretatus est hanc geometriam velut geometriam sphaerae cuius radius factus sit imaginarius : si talis

enim radius inscribitur in formula definiente aream trianguli sphaerici, colligitur ipsa formula quam postulat hypothesis de angulo acuto :

$$\begin{aligned} \Sigma &= (iR)^2 (A + B + C - \pi) \\ &= -R^2 (A + B + C - \pi) \\ &= \ \ R^2 (\pi - A - B - C) \end{aligned}$$

Quae formula indicat aliam analogiam inter duas geometrias : tum in geometria sphaerae tum in hac geometria non euclidea agnoscendae sunt definitae extensiones maximae, quas trianguli geodetici nequeunt suis areis superare.

Si de sphaera agitur (necnon de geometria non euclidea respondente hypothesi de angulo obtuso) triangulus geodeticus maximus habetur (ut iam notatum est) cum tres anguli A, B, C aequant singuli duos rectos ; et area trianguli (congruens cum semisphaera) est :

$$\Sigma = R^2 (3\pi - \pi) = 2\pi R^2$$

Si agitur de geometria non euclidea (respondente hypothesi de angulo acuto) extensio maxima triangulorum habetur cum omnes tres anguli A, B, C facti sunt nulli ; et area trianguli est :

$$\Sigma = R^2 \cdot (\pi - 0) = \pi \cdot R^2$$

5. Studia de postulato euclideo sub exitu saec. XVIII et per primum dimidium saec. XIX.

Inter hanc periodum temporis plures eximii mathematici operam dederunt studio critico de postulato euclideo ; duae autem series auctorum distingui possunt.

Alii auctores, ut *D'Alembert*, *Fourier*, *Laplace*, *Legendre* (in Gallia), *Kaestner* et *Klugel* (in Germania), *etsi non parum de hac re meditati sunt, non produxerunt tamen conclusiones novas.* Destiterunt potius tentaminibus demonstrandi propositionem euclideam ; nonnulli vero (nominatim germanici, obse-

cundantes philosophiae kantianae) aestimaverunt positionem euclideam servandam esse, sed tantum ut postulatum.

Inter hos auctores eminet Legendre, qui primus perspexit totam geometriam sphaerae construi posse, seposito quovis postulato de rectis parallelis. Ipse Legendre consideravit duas oppositas hypotheses quoad summam angulorum triangulorum: alteram euclideam (de summa pari duobus rectis), alteram non euclideam (de summa minori duobus rectis); excluserat vero summam excedentem duos rectos, quia tenebat lineam rectam produci posse in indefinitum, et cum hac condicione revera hypothesis illa non cohaeret. Legendre probavit etiam (« theorema Legendre ») summam angulorum triangulorum semper aequare duos rectos, si semel hic casus contingit. Agitur de propositionibus, quas iam Saccheri et Lambert consideraverant et probaverant; sed opus Legendre magis innotuit et magis valuit ad attentionem mathematicorum alliciendam.

Alii auctores coeperunt considerare hypothesim non euclideam tamquam idoneum fundamentum integri systematis geometrici, expertis quavis interna contradictione.

Inter hos auctores *Fridericus Gauss* (1777-1825) primus nominandus est, tum ob eius praestantissimam auctoritatem summi mathematici, tum quia coepit studere problemati iam ab anno 1792. Eminent dein *Nicolaus Iwanowitsch Lobacewski* (1793-1856) et *Ioannes Bolyai* (1802-1850), qui, una cum Gauss (singuli perficientes suum opus ignorando opus ceterorum), dicendi sunt primi veri auctores geometriae non euclideae. Digni etiam sunt qui notentur *Carolus Schweikart* (1780-1857), et eius nepos *Franciscus Adolphus Taurinus* (1794-1874), qui pervenerunt ad exacte definiendas varias propositiones et formulas geometriae non euclideae.

6. Carolus Fridericus Gauss.

Hic insignis mathematicus non uno intuitu perspexit solutionem problematis, sed per quatuor decennia huic laboriosae quaestioni operam dedit: fortasse initio (1792) conatus etiam est demonstrare positionem euclideam; adhuc haesitans anno

1808, neque superaverat omnes difficultates anno 1813. Anno 1816 iam evolverat novam geometriam quam dixerat « anti-euclideam » ; adhuc tamen dubitabat de eius interna cohaerentia logica (ex epistula ad Olbers : 28-IV-1817). Anno 1924 declaravit irrita fuisse omnia tentamina inveniendi quandam internam contradictionem in sua geometria, quam iam denominavit « non euclideam » (epistula ad Taurinus) ; tandem *anno* 1831 *Gauss firmiter asseruit geometriam non euclideam expertem esse quavis contradictione* (epistula ad astronomum Schumacher) ; nondum vero absolverat suum opus.

Gauss construxit novam geometriam plane seponendo postulatum euclideum de parallelis ; collegit autem formulas — ad dimetiendas longitudines et areas — quae continent peculiarem coëfficientem « constantem » k ; *agitur de tali coëfficiente qui relationem ponit inter formam et extensionem figurarum ; quare excluduntur figurae similes et constituitur geometria non euclidea. Geometria autem euclidea apparet tamquam limes ad quem tendit ipsa geometria non euclidea si dimensio illa* k *tendit ad infinitum.*

Opportunum est has conclusiones illustrare exemplo. Formula exprimens longitudinem circuli cuius radius sit x (quam formulam ipse Gauss definiverat) est :

$$\bigcirc\, x = \pi \cdot k \,(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}})$$

quae expressio (cfr. Appendicem de functionibus exponentialibus e^x, e^{-x}) verti potest in sequentem seriem :

$$\bigcirc\, x = \pi k \left[2\frac{x}{k} + 2\frac{x^3}{k^3 \cdot 3\,!} + 2\frac{x^5}{k^5 \cdot 5\,!} + \dots \right.$$

$$= 2\pi x + 2\pi \frac{x^3}{k^2 \cdot 3\,!} + 2\pi \frac{x^5}{k^4 \cdot 5\,!} + \dots$$

quod si k in indefinitum crescit, solus primus terminus seriei

manet finitus, dum sequentes fiunt infinitesimi evanescentes ; tandem, si $k = \infty$, stat formula geometriae euclideae :

$$\bigcirc\, x = 2\pi x$$

Coëfficiens « constans » k, a Gauss inventus, plane congruit cum coëfficiente, quem iam adhibuerant Saccheri et Lambert ad definiendam aream triangulorum iuxta hypothesim non euclideam (respondentem casui « de angulo acuto ») :

$$\Sigma = k^2 [\pi - A - B - C]$$

7. Ferdinandus Carolus Schweikart.

Doctor in iure, Schweikart excoluit etiam geometriam ; perpendens hypothesim non euclideam, exacte definivit nonnullas eius proprietates. *Notavit inter cetera non dari figuras similes ; nominatim animadvertit altitudinem h trianguli rectanguli isoscelis non posse crescere ultra definitum terminum ;* dum enim crescit h imminuuntur bini anguli bases ; qui tandem iam fiunt nulli cum altitudo trianguli attingit sequentem mensuram :

$$h = k \log (1 + \sqrt{2})$$

in qua formula coëfficiens k est ipse coëfficiens gaussianus. Triangulus denique (rectangulus isosceles) altioris altitudinis nequit dari quia duo latera anguli recti iam non tangerent tertium latus basim.

8. Franz Adolphus Taurinus.

Eius opus *Geometriae prima elementa* (1826) continet hypotheses et processus analogos tractationibus Saccheri et Lambert.

Perpendens hypothesim de angulo acuto, *Taurinus denuo invenit illum ipsum coëfficientem k, quem iam Gauss in lucem*

2

tulerat ; sed propter hunc ipsum coëfficientem (qui se exhibet tamquam dimensionem singulari privilegio praeditam) *Taurinus reiecit hypothesim de angulo acuto et retinuit necessitatem positionis euclideae,* saltem si consideratur aspectus physicus geometriae : si enim formulae geometriae exprimere debent veras relationes metricas inter extensiones spatii physici, ratio dari nequit (ita ipse putaverat) ob quam praestet una particularis dimensio k ; sed omnes possibiles coëfficientes « absoluti » pari iure affirmandi essent ; quae necessitas ducit tandem ad illos negandos.

Cum vero hanc primam tractationem iam absolverat, Taurinus intuitus est dari posse geometriam non euclideam ut systema analyticum formularum, quod eruitur ex trigonometria sphaerica si pro radio R sphaerae ponitur radius imaginarius $iR = \sqrt{-1} \cdot R$.

Iam Lambert (cfr. n. 4) notaverat hanc relationem formalem inter duas geometrias ; sed Taurinus clarius perspexit relationem illam universatim stare pro tota trigonometria ; quare uno ictu (mutando scilicet iuxta dictam regulam formulas trigonometriae sphaericae) collegit integrum novum systema geometricum (analyticum), quod denominavit geometriam logarithmico-sphaericam propter logarithmos quos adhibuerat ; quod systema formularum sequentes auctores geometriae non euclideae, Lobačewski et Bolyai, definiverunt laboriosiori methodo.

Caput II

GEOMETRIA NON EUCLIDEA HYPERBOLICA: OPERA LOBAČEWSKI ET BOLYAI

9. Generalis indoles operis.

Hi duo auctores opus plane analogum perfecerunt: seponentes postulatum V euclideum, pro ipso posuerunt hypothesim non euclideam « de angulo acuto »; negligendo hypothesim « de angulo obtuso », quia retinuerunt postulatum II Euclidis de recta infinita.

Praecedentes auctores iam collegerant ex hac positione non pauca consectaria; nominatim: summa angulorum triangulorum minor est duobus rectis; cuivis rectae, per puncta ei externa, deducuntur binae distinctae parallelae (pro binis distinctis directionibus); distantia inter duas parallelas continuo decrescit (in directionem parallelismi); non dantur figurae similes; et plures aliae propositiones. *Lobačewski et Bolyai hanc deductionem logicam provexerunt usque ad definiendam totam trigonometriam plani non euclidei, necnon usque ad varias mensuras linearum curvarum, arearum et voluminum. Nec invenerunt ullum absurdum; ex contrario argumentum detexerunt quo concluderent novam geometriam esse systema logice cohaerens.*

Sequens caput nostrae tractationis exhibet peculiares repraesentationes graphicas quibus facilius illustrabuntur processus mathematici a Lobačewski et Bolyai adhibiti; sufficiat igitur in praesenti solum indicare praecipua stadia investigationis. Non desunt discrimina inter tractationes duorum auctorum; paria nihilominus sunt criteria, et pares conclusiones; quare licet simul dicere de duobus operibus. Eorum praecipua capita revocari possunt ad quatuor puncta in sequenti paragrapho exposita.

10. Praecipua capita operis Lobačewski et Bolyai.

a. Trigonometria « orisphaerae ».

In spatio non euclideo agnoscenda est peculiaris superficies, « orisphaera » denominata, quae gaudet ipsa geometria plani euclidei.

« Orisphaera » est velut sphaera praedita radio infinito ; quare eius radii facti sunt rectae parallelae (in eandem directionem) : apte denominantur « axes » orisphaerae, et consti-

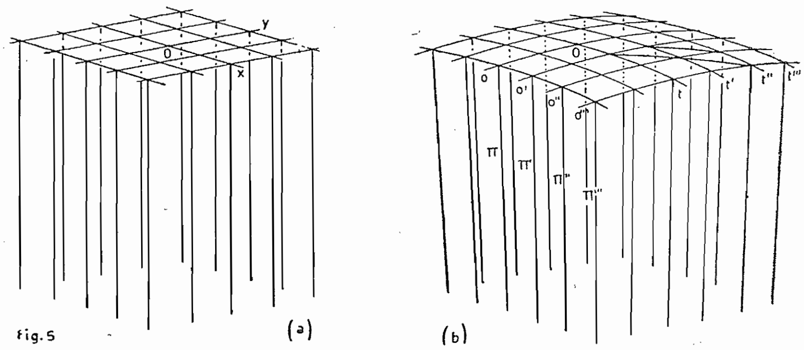


fig. 5 (a) (b)

tuunt eam collectionem rectarum, quae dicitur « stella impropria »* (fig. 5) ; orisphaera autem est superficies quae secat iuxta angulum rectum hanc « stellam ».

* Dicitur « stella propria » collectio omnium rectarum, necnon planorum, quae transeunt per unum definitum punctum (non infinite distans) ; si vero hoc commune punctum recedit a quavis distantia finita et fit infinite distans, stella dicitur « impropria » : eius rectae fiunt parallelae (in unam eandemque directionem, si de spatio non euclideo agitur), et eius plana sunt omnia plana parallela (in eandem directionem) cuivis rectae eiusdem stellae.

Si de spatio euclideo agitur, omnes rectae et omnia plana stellae impropriae (utpote parallela) servant invariatam suam mutuam distantiam et admittunt ubique commune planum orthogonum ; si vero agitur de spatio non euclideo, rectae et plana stellae non servant invariatam suam mutuam distantiam et nullibi admittunt unum commune planum orthogonum. Quare additur tertius typus stellae : « stella idealis », constituta omnibus rectis et planis orthogonis uni eidemque plano : mutuae distantiae harum rectarum et horum planorum continuo crescunt quo maior fit distantia ab illo communi plano orthogono.

In spatio euclideo omnes rectae unius stellae impropriae sunt inter se parallelae et aequidistantes (fig. 5, a) ; in spatio non euclideo tales rectae sunt quidem parallelae (in unam directionem), sed non aequidistantes (fig. 5, b) ; in utroque tamen spatio viget geometria euclidea supra superficiem secantem stellam iuxta angulum rectum.

Manifestant hanc communem proprietatem euclideam bina systemata orthogona geodeticarum, quae describi possunt tum supra planum tum supra orisphaeram : geodeticae plani sunt rectae ; geodeticae vero orisphaerae non sunt rectae, et dicuntur « oricycli ».

Proprietas euclidea orisphaerae demonstrata est consuetis ratiociniis intuitivis geometriae elementaris ; quae demonstratio potest simplici ratione colligi ex possibilitate transferendi orisphaeram supra seipsam iuxta duas directiones orthogonas, ita ut eius puncta describant duo systemata orthogona geodeticarum (fig. 5 ; cfr. n. 2).

Planum Π stellae (secans orisphaeram iuxta oricyclum o) rotetur circa axem infinite distantem iacentem supra ipsum planum ; hac rotatione planum Π transfertur successive in positiones Π' Π'' Π''' ..., successive secando orisphaeram iuxta tot oricyclos o' o'' o'''...

Dum autem oricyclus o transfertur in o' o'' o''' ..., unumquodque eius punctum constanter manet supra unum planum stellae ; quare percurrit traiectoriam oricyclicam ; describuntur propterea tot orycicli t t' t'' t''' ..., qui, utpote traiectoriae simultaneae in motu rigido, sunt etiam tot lineae servantes invariatam suam mutuam distantiam. Pari de causa sunt inter se aequidistantes omnes bini oricycli o o' o'' o''' ... Anguli denique, sub quibus mutuo se secant duo systemata oricyclorum o o' o'' o''' ... et t t' t'' t''' ... sunt constanter recti : sunt enim anguli quos determinant — sua translatione — duae geodeticae orthogonae o et t.

Supra orisphaeram (fig. 5) graphice descriptae sunt variae proprietates euclideae spectantes unicitatem geodeticae parallelae, quadrangulos praeditos quatuor angulis rectis, triangulos similes. *Natura euclidea orisphaerae potest pluribus in modis probari* (v. Fano : *Geometria non euclidea :* nn. 21, 24, 26 : probatur etiam nonnullas proprietates competere stellae impropriae sive in spatio euclideo sive in spatio non euclideo) ; *suf-*

ficiat vero nobis notare omnes istas demonstrationes absolutas esse methodo intuitiva geometriae elementaris : dein utemur hac animadversione.

b. Trigonometria sphaerica.

Trigonometria sphaerica construi potest sine usu postulati V Euclidis ; quare eius propositiones absolute stant pro quovis systemate geometrico, quod colligi possit ex principiis euclideis quae praecedunt postulatum V.

Propterea trigonometria sphaerica constituit novum punctum firmiter acquisitum etiam pro ea geometria non euclidea quae tandem construi possit.

Ipsa denique trigonometria sphaerica exprimitur per aequationes quae exhibebunt perspicuam et fructuosam analogiam cum formulis propriis geometriae non euclideae.

Tota summa trigonometriae sphaericae revocari potest ad duo theoremata, alterum dictum « de sinibus » alterum « de cosinu », * ex quibus ceterae omnes relationes trigonometricae deducuntur. Iamvero haec ipsa theoremata statui potuerunt sine ullo usu postulati V Euclidis.

---

* Theorema de sinibus (sub consueta eius forma geometriae euclideae) ita enunciatur : in quovis triangulo sphaerico sinus eius angulorum A, B, C stant inter se sicut sinus illorum angulorum (quorum vertex est in centro sphaerae) qui substentant latera curvilinea a, b, c eiusdem trianguli ; i. e. :

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \frac{a}{r} : \sin \frac{b}{r} : \sin \frac{c}{r}$$

similiter, pro theoremate « de cosinu » :

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cdot \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \cdot \sin \frac{c}{r} \cdot \sin A$$

Quae formulae simpliciorem formam obtinent si ipse radius r sphaerae assumitur pro unitate mensurae linearis (tunc enim anguli substentantes latera curvilinea trianguli sphaerici mensurantur per ipsam longitudinem horum laterum) ; scilicet :

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$$
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \sin A$$

et theorema « de sinibus » ita potest enunciari : in triangulis sphaericis sinus laterum stant inter se sicut sinus angulorum oppositorum.

Praetermissa minuta demonstratione, notanda nihilominus sunt duo stadia per quae ipsa demonstratio absoluta est.

— *Prius demonstratum est theorema « de sinibus » pro triangulis planis, sub forma nova et generaliori, quae stat in quavis geometria, sive euclidea sive non euclidea.*

Ad hoc theorema praevium statuendum, aptum medium porrexit geometria orisphaerae : peculiares enim relationes stant inter triangulos orisphaericos et triangulos planos ; quare nonnullae simpliciores formulae trigonometriae orisphaerae statim suppeditant analogas formulas trigonometriae planae ; quarum summa haec est :

in quovis triangulo rectilineo sinus angulorum A, B, C stant inter se sicut circuli quorum radii sint latera a, b, c eiusdem trianguli, quae opponuntur dictis angulis ; i. e. :

$$\sin A : \sin B : \sin C = \bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c$$

(sub qua forma theorema manifesto stat etiam pro geometria plana euclidea : est propterea theorema geometriae absolutae).

— *Statutae denique sunt peculiares comparationes inter triangulos rectilineos et sphaericos : collectae sunt formulae trigonometriae sphaericae,* quarum summa revocatur ad duo theoremata « de sinibus » et « de cosinu » ; scilicet* :

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$$
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \sin A$$

Tota igitur trigonometria sphaerica absolute stat neque pendet ex postulato V euclideo.

---

* In his expressionibus sinus et cosinus laterum a, b, c intelliguntur definiti (sicut etiam in trigonometria euclidea) per peculiares series algebricas, quae constituuntur variis potentiis ipsorum arcuum geodeticorum a, b, c (cfr. Append. II n. 23). Quae definitio sinus et cosinus supponit peculiarem condicionem : unitas mensurae, qua mensurantur arcus geodetici, talis debet esse quae tribuat mensuram $\pi/2$ quartae parti circuli. Quoddam vero discrimen notandum est, quoad hanc condicionem, inter geometriam euclideam et non euclideam : non eadem enim est in duabus geometriis proportio inter circulum et eius radium.

Si de geometria euclidea agitur, proportio illa est 2π ; quare ipse radius circuli est illa longitudo, quae (assumpta pro unitate mensurae) tribuit mensuram 2π integro circulo, et mensuram $\pi/2$ eius quartae parti.

Si vero agitur de geometria non euclidea (cum alia sit proportio inter circulum et eius radium), unitas illa, quae dat quartae parti circuli mensuram $\pi/2$, discrepat a radio ; ei vero competit longitudo plane definita. Hac unitate mensurandi sunt arcus a, b, c ; quae mensurae dant (iuxta formulas indicatas) functiones sinus et cosinus, non minus quam in geometria euclidea.

c. Trigonometria plana non euclidea.

Summa huius trigonometriae revocatur (non minus quam summa trigonometriae sphaericae) *ad duo theoremata « de sinibus » et « de cosinu ». Quae theoremata deducta sunt ex quibusdam comparationibus inter notam geometriam euclideam orisphaerae et geometriam plani.*

Formulae exprimentes haec duo theoremata omnino analoga sunt in trigonometria sphaerica et trigonometria plana ; duo discrimina nihilominus notanda sunt :

a) in trigonometria sphaerica simpliciter considerantur latera a, b, c triangulorum, dum *in trigonometria plana latera trianguli dividenda sunt per coëfficientem quendam constantem* k (qui est ipse coëfficiens gaussianus, qui nexum statuit inter formam et extensionem figurarum — cfr. n. 6) ;

b) in trigonometria sphaerica considerantur consuetae functiones circulares sinus et cosinus dictorum arcuum a, b, c ; dum *in trigonometria plani non euclidei considerantur quaedam novae functiones quae dicuntur sinus et cosinus hyperbolici* (qui notantur symbolis *Sh* et *Ch*).

Sunt autem sinus et cosinus hyperbolici functiones quae deducuntur ex hyperbole analoga ratione qua consuetae functiones sinus et cosinus (quae « circulares » dicuntur) derivantur ex circulo (cfr. Append. II n. 23).

En igitur formulae exprimentes summam trigonometriae planae non euclideae :

$$\mathrm{Sh}\,\frac{a}{k} : \mathrm{Sh}\,\frac{b}{k} : \mathrm{Sh}\,\frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\mathrm{Ch}\,\frac{a}{k} = \mathrm{Ch}\,\frac{b}{k} \cdot \mathrm{Ch}\,\frac{c}{k} - \mathrm{Sh}\,\frac{b}{k} \cdot \mathrm{Sh}\,\frac{c}{k} \cdot \cos A$$

Praetermittimus completam analysim illarum relationum inter orisphaeram et planum non euclideum, quae duxerunt ad definiendam trigonometriam planam non euclideam (*quas relationes ceteroquin faciliori ratione illustrare poterimus in sequenti capite*) *; duo tantum interim notemus :*

a) Nonnullae relationes inter triangulos orisphaericos et triangulos planos iam consideratae et adhibitae sunt (cfr. b) ut colligeretur illa peculiaris expressio theorematis « de sinibus », quae stat pro quavis geometria plana, sive euclidea sive non euclidea; scilicet :

$$\text{(I)} \qquad \sin A : \sin B : \sin C = \bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c$$

b) Novae comparationes inter ipsam orisphaeram et planum non euclideum ducunt ad definiendam relationem (non euclideam) inter circulum et eius radium (rectum) x; agitur de ea ipsa relatione quam iam Gauss detexerat (cfr. n. 6).

Consideratur circulus qui sit intersectio inter orisphaeram et planum; qui circulus propterea pertinet utrique superficiei. Si hic circulus refertur ad eius radium orisphaericum r, eius longitudo exprimitur nota formula euclidea $2\pi r$; sufficit denique ut definiatur relatio inter radium orisphaericum r et radium rectilineum x, ut expressio $2\pi r$ vertatur in expressionem longitudinis circuli respectu eius radii in plano. Colligitur autem sequens expressio :

$$x = \pi k \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

Haec ipsa formula introducit functiones hyperbolicas sinus et cosinus, quae definiuntur :

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad\qquad \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

quare :

$$x = 2\pi k \cdot \operatorname{Sh} \frac{x}{k}$$

quae expressio, introducta in relatione (I), dat novam formam theoremati « de sinibus ». Similiter obtinetur nova expressio theorematis « de cosinu ».

11. Relationes inter varias trigonometrias.

a. Trigonometria plana non euclidea et trigonometria sphaerica.

In paragrapho praecedenti iam notata est perspicua similitudo formalis, quam exhibent in his duabus geometriis theoremata de sinibus et de cosinu : *formulae trigonometriae sphaericae vertuntur in homologas formulas trigonometriae planae si*

pro functionibus circularibus sinus et cosinus ponuntur functiones hyperbolicae, et pro lateribus a, b, c *scribitur* $a/k, b/k, c/k$.

Neque agitur de quadam mera substitutione scripturarum similium ; sed expressiones trigonometriae planae deducuntur ex ipsis formulis sphaericis per peculiarem transformationem algebricam : retineantur formulae trigonometriae sphaericae cum suis functionibus circularibus sinus et cosinus (cfr. n. 10, b c), et solum in ipsis ponantur (pro lateribus a, b, c) latera imaginaria $a/ik, b/ik, c/ik$: iam obtinentur formulae trigonometriae planae non euclideae. Etenim : inter functiones circulares et functiones hyperbolicas stant sequentes relationes (cfr. Append. II, n. 23) :

$$\sin \frac{x}{ik} = \frac{1}{i} \operatorname{Sh} \frac{x}{k} ; \qquad \cos \frac{x}{ik} = \operatorname{Ch} \frac{x}{k}$$

Notandum. -

Hae adnimadversiones nos ducunt ad illam conclusionem, quam iam perspexerant Lambert et Taurinus (cfr. nn. 4, 8) : *geometria non euclidea* (respondens hypothesi de angulo acuto) *est velut geometria sphaerae cuius radius factus sit imaginarius.*

Consideremus enim expressionem, quae competit theoremati « de sinibus » si mensura arcuum refertur (iuxta relationem euclideam) ad radium sphaerae (cfr. n. 10, b) :

$$\sin \frac{a}{r} : \sin \frac{b}{r} : \sin \frac{c}{r} = \sin A : \sin B : \sin C$$

ponatur autem, in hac ipsa formula, pro radio r radius imaginarius ik ; obtinetur :

$$\sin \frac{a}{ik} : \sin \frac{b}{ik} : \sin \frac{c}{ik} = \sin A : \sin B : \sin C$$

stantibus denique relationibus inter functiones circulares et hyperbolicas, colligimus :

$$\mathrm{Sh}\,\frac{a}{k} : \mathrm{Sh}\,\frac{b}{k} : \mathrm{Sh}\,\frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C$$

qua formula exprimitur theorema « de sinibus » in geometria plana non euclidea. Pari ratione colligi potest expressio theorematis « de cosinu », et sic integra trigonometria plana non euclidea.

b. Geometria non euclidea et geometria euclidea.

Relationes metricae propriae geometriae non euclideae tendunt tamquam ad limitem extremum ad ipsas relationes metricas euclideas quo minores fiunt proportiones $a/k, b/k, c/k$ *in illis contentae.* Quae condicio duobus in modis potest haberi : vel quia coëfficiens k est valde grandis, vel quia latera a, b, c triangulorum sunt valde parva respectu k.

Ad probandam hanc relationem inter duas geometrias, sufficit ut in formulis trigonometriae non euclideae scribantur eae series quae exprimunt functiones hyperbolicas (cfr. Append. II, n. 23) ; in his enim seriebus coëfficiens k et eius variae potentiae apparent ut tot denominatores fractionum ; quare, si k fit valde grandis (saltem respectu a, b, c), possunt negligi ut minimi et evanescentes omnes ii termini in quibus potentiae coëfficientis k sunt altioris gradus ; non manent hac ratione nisi illi termini quibus constituuntur formulae trigonometriae euclideae. Quod si k supponitur factus simpliciter infinitus, manent exacte ipsae formulae euclideae.

Exemplum talis transformationis formularum iam consideravimus (cfr. n. 6) deducendo formulam euclideam de longitudine circuli ex homologa formula non euclidea, supponendo k crescere in infinitum.

Formulae autem euclideae, quae dicta methodo colliguntur ex theorematibus (non euclideis) « de sinibus » et « de cosinu », sunt :

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$

Alia aequalitas characteristica trigonometriae euclideae est :

$$\cos A = -\cos (B + C)$$

quae ostendit angulos A et $(B + C)$ esse supplementares et propterea :

$$A + B + C = \pi$$

Duae igitur conclusiones iam enunciari possunt :

1a) *Ad triangulos infinitesimos quod attinet, stat geometria euclidea ; neque haec conclusio pendet ex postulato V Euclidis.*

2a) *Geometria euclidea haberi potest ut casus limes ad quem tendit geometria non euclidea, crescente in indefinitum coëfficiente k.*

Notandum.

Notanda est positio media geometriae euclideae inter duas geometrias non euclideas, respondentes duabus hypothesibus de angulo obtuso et de angulo acuto.

Utraeque enim hae geometriae, velut geometriae sphaericae (quarum radii sint k et ik) tendunt ad geometriam non euclideam, crescente k in indefinitum ; accedunt autem ad communem terminum euclideum procedendo velut ex duabus oppositis directionibus, ut sequens conspectus satis illustrat. In ipso conspectu, duae formae geometriae non euclideae iam designantur iis nominibus — geometriae « ellipticae » et « hyperbolicae » — quae invaluerunt in secundo dimidio saeculi XIX.*

Geometria elliptica (angulus obtusus)	*Geometria euclidea*	*Geometria hyperbolica* (angulus acutus)
k finitus $\longrightarrow \infty$	$k = \infty$	$\infty \longleftarrow$ finitus ik
$A + B + C > \pi$	$A + B + C = \pi$	$A + B + C < \pi$
Nulla parallela	Unica parallela	Binae parallelae
$\sin A : \sin B : \sin C$ $= \sin \frac{a}{k} : \sin \frac{a}{k} : \sin \frac{a}{k}$	$\sin A : \sin B : \sin C$ $= a : b : c$	$\sin A : \sin B : \sin C$ $= \sin \frac{a}{ik} : \sin \frac{b}{ik} : \sin \frac{c}{ik}$

* Geometria Lobačewski-Bolyai initio denominata erat a Bolyai « absoluta » (quia non obnoxia peculiari condicioni postulati V Euclidis, et propterea aperta ad varios casus possibiles) ; Lobačewski eam dixerat « geometriam imaginariam ». Geometria « elliptica » coepit tractari a Riemann.

12. Significatio et vis operis Lobačewski-Bolyai.

a. De interna cohaerentia systematis non euclidei.

Gauss, Lobačewski, Bolyai aestimaverunt se iam posse tuto affirmare internam cohaerentiam logicam geometriae non euclideae : non tantum quia ipsi nullum consectarium absurdum invenerant, sed quia iam eis praesto erat argumentum quo excluderent quamvis incongruentiam umquam inveniri posse.

Non enim produxerant solas elementares descriptiones novae geometriae, sed eam etiam expresserant sub forma systematis analytici, cuius summa revocari potest ad trigonometriam planam (cfr. n. 10 c) vel ad aequipollens systema geometriae analyticae (cfr. n. 13 et Append. III).* Data autem expressione analytica plani non euclidei, quaevis eius proprietas hauriri potest ex hoc ipso systemate analytico ; sed agitur de systemate quod certo expers est cuiusvis internae repugnantiae (cfr. n. 12, a, b) ; quare ex ipso nequeunt hauriri nisi consectaria inter se cohaerentia.

Notandum.

Haec argumentatio, ut sine exceptione confirmetur, indiget nonnullis ulterioribus declarationibus ; duplici enim de causa dubia adhuc poni possunt circa omnimodam internam congruentiam geometriae non euclideae :

1) ut geometria non euclidea maneat undequaque comprobata *consideranda videtur integra stereometria ;* ad quem finem impar censeri potest sola trigonometria bidimensionalis.

---

* Geometria analytica plani statuit in primis binas coordinatas quibus definiuntur varia puncta plani ; secunda positio praecipua (ad quam revocari possunt omnes proprietates superficiei) stat in formula vi cuius omnis distantia infinitesima *ds* deducitur ex coordinatis punctorum.

Si de plano non euclideo agitur, duo systemata linearum coordinatarum possunt, ex. gr., esse fascem rectarum parallelarum (in unam directionem) et oricycli illis rectis orthogoni ; vel fascis proprius rectarum (egredientium ex uno puncto) et circuli orthogoni; ad deducendam denique expressionem elementi linearis *ds* valent eae ipsae proprietates quae sinunt constructionem trigonometriae planae non euclideae ; quare geometria analytica et trigonometria constituunt duo systemata aequipollentia.

2) trigonometria non tractat nisi de relationibus metricis; sed duo genera problematum geometricorum distinguenda sunt:

— dantur quaestiones metricae, ad quas tractandas non necessario considerandum est integrum ens geometricum extensum (ex. gr.: relationes metricae characteristicae superficiei sphaericae, quae erui possunt ex analysi peracta intra delimitatum ambitum ipsius superficiei);

— *dantur denique problemata « configurationis »* seu *« topologica »* (circa rationes quibus ens geometricum extenditur et eius partes connectuntur — ex. gr. peculiaris ratio qua superficies sphaerica clauditur in seipsam); ad has quaestiones tractandas consideranda est integra extensio entis geometrici. Licet vero suspicari quandam difficultatem contra internam congruentiam spatii non euclidei procedere posse ex hoc capite quaestionum.

b. Interna congruentia geometriae euclideae.

Haec congruentia iam manet indubia: propositio scilicet euclidea circa parallelas, etiamsi concipiatur ut merum postulatum, constituit nihilominus (una cum praecedentibus propositionibus) *systema certo cohaerens.*

Etenim: si postulatum illud induceret quamdam contradictionem, reiciendum esset; consequenter necessario considerandae essent aliae duae hypotheses possibiles « de angulo acuto » et « de angulo obtuso » (nequeunt enim omnes tres hypotheses reici ita ut anguli triangulorum dicantur nec aequare duos rectos, nec illos superare, nec esse inferiores). Utraeque autem illae hypotheses, sive simul sive seorsim sumptae, denuo ducunt ad systema euclideum ut ad casum limitem.*

c. Problema physicum.

Si plura systemata geometrica construi possunt, quae interna cohaerentia logica gaudent, quaeritur quodnam ex ipsis congruat cum mundo physico.

---

* Interna cohaerentia competit etiam stereometriae euclideae: hoc probant relationes inter singulum planum euclideum et stellam impropriam orthogonam eidem plano (cfr. n. 10, a).

Experimenta igitur facta sunt circa triangulos (radiis lucis constitutos) ut accurate notaretur summa angulorum. Iuxta geometriam non euclideam haec summa eo magis discrepat a duobus rectis quo maior est area trianguli; quare mensurae factae sunt circa triangulos valde amplos. Gauss consideravit triangulum terrestrem Brocken-Hohenagen-Inselberg; Lobačewski vero triangulos astronomicos, nominatim parallassem stellarum magis distantium. Nulla vero mensura dedit defectum geodeticum satis notabilem, qui certo referri non posset ad errores mensurarum.

Conclusum igitur est spatium physicum (saltem intra limites illorum experimentorum) *bene congruere cum geometria euclidea.* Hoc autem non impedit quominus adhiberi possit etiam systema Lobačewski-Bolyai ad exprimendas easdem relationes trigonometricas empiricas: sufficit ut satis altus sit coëfficiens k (saltem aequans mille millium axis orbitis terrestris); sed systema euclideum, utpote simplicius, magis « commodum » est — ait Poincaré — et ideo praeferendum.

Haec notata sunt circa aspectum physicum quaestionis ab ipsis primis auctoribus geometriae non euclideae; *plura vero de hac re nobis dicenda erunt.*

Caput III

GEOMETRIA INTRINSECA SUPERFICIERUM (GAUSS)

Gauss, Lobačewski, Bolyai elaboraverant geometriam non euclideam sub forma systematis analytici ; Eugenius Beltrami addidit perspicuam interpretationem eiusdem geometriae definiendo peculiares superficies (spatii euclidei), quarum geometria exacte congruit cum geometria hyperbolica Lobačewski-Bolyai. Ad quod problema solvendum Beltrami adhibuit peculiarem methodum describendi proprietates metricas superficierum, quam Gauss elaboraverat. De hac igitur methodo nonnulla nobis dicenda sunt antequam agamus de opere Eugenii Beltrami.

13. Coordinatae curvilineae.

Ut notum est (cfr. Append. III), geometria plani (euclidei) induit vestem analyticam si puncta eiusdem plani referuntur ad axes cartesianos x, y (orthogonos vel obliquos) vel ad alia systemata linearum coordinatarum (ex. gr. ad coordinatas polares).

Generalior vero expressio geometriae analyticae obtinetur si assumuntur tamquam lineae coordinatae duo systemata linearum curvarum, quae, suis mutuis intersectionibus, definiant varia puncta plani (fig. 6). Ut expressiones analyticae harum curvarum subici possint necessariis operationibus calculi, servandae sunt nonnullae condiciones* : nominatim unum-

* Lineae coordinatae evolvi debent non modo fracto, aut utcumque abrupto, sed peculiari ratione continua, ita ut expressiones analyticae earundem curvarum subici possint omnibus operationibus quae requiri possunt ad solvenda varia problemata. Requiritur scilicet (iuxta locutiones proprias calculi differentialis) ut functiones exprimentes lineas coordinatas admittant ubique suas « functiones derivatas » (« derivatas primas » et etiam subsequentes) quantum opus est.

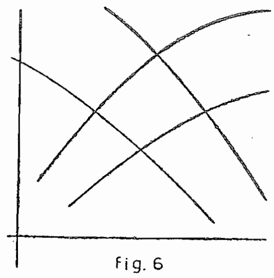


Fig. 6

quodque systema linearum coordinatarum tale debet esse quod concipi possit ut generatum ex translatione unius eius lineae, quae — dum transfertur — potest etiam paulatim deformari (fig. 7).

Linea generatrix systematis potest definiri methodo analytica : si eius puncta definiuntur ex. gr. per coordinatas cartesianas x, y, expressio analytica ipsius lineae consistit in quadam relatione inter binas coordinatas x, y variorum punctorum. Etenim : linea continua concipi potest ut generata ex translatione unius puncti ; iamvero, si punctum percurrere debet determinatam lineam, eius binae coordinatae nequeunt seorsim libere variari, sed earum variationes ligantur quodam definito vinculo ; quod vinculum analytice exprimitur per aequationem (algebricam aut transcendentem) qua binae coordinatae referuntur ad invicem (cfr. exempla in Append. III).

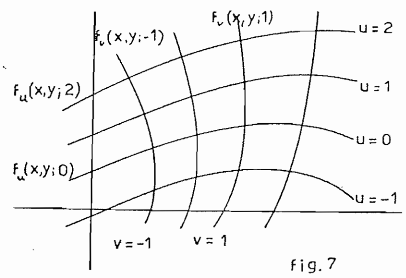


fig. 7

Dicta aequatio, definiens lineam generatricem determinati systematis, breviter notatur sequenti scriptura symbolica :

$$f\,(x, y\,;\; u) = 0$$

in qua notatione u denotat peculiare parametrum (inclusum in ipsa aequatione — cfr. Append. III). Si u invariatum manet, functio $f\,(x, y\,;\; u) = 0$ definit unam determinatam lineam, quae obtemperat condicioni $u =$ const. Si vero pro parametro u in ordinem ponuntur numeri variantes modo continuo, eadem functio definit integrum systema linearum coordinatarum.

Quod si hac ratione definiuntur duo systemata curvarum :

$$f_u(x, y; u) = 0$$
$$f_v(x, y; v) = 0$$

quae, suis mutuis intersectionibus, instituant relationem biunivocam inter puncta plani et bina parametra u, v (fig. 7), haec ipsa systemata assumi possunt tamquam lineae coordinatae, et bina parametra u, v tamquam coordinatae punctorum.

Analoga systemata linearum curvarum statui possunt supra superficies curvas : quo in casu earum expressiones analyticae consistunt in relationibus algebricis inter ternas coordinatas spatiales x, y, z et breviter notantur :

$$f_u(x, y, z; u) = 0$$
$$f_v(x, y, z; v) = 0$$

quae relationes includunt nonnulla parametra ; speciatim considerandа veniunt illa bina parametra u, v, quae — dum invariata permanent — definiunt ipsas lineas coordinatas $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$, et quae — per variationem sui — generant integrum systema linearum coordinatarum.

14. Elementum lineare.

Ut proprietates geometricae superficierum obtineant suam expressionem analyticam, definienda in primis est analytica expressio « elementi linearis » : exprimenda scilicet est (per coordinatas u, v) longitudo intervalli infinitesimi (seu evanescentis) ds, comprehensi inter duo puncta quae in indefinitum magis ac magis proxima fiant. Statuto vero hoc elemento metrico infinitesimo, mensurari possunt omnes lineae finitae (sive rectae sive curvae) et consequenter etiam arcus et anguli, ita ut deducantur denique omnes relationes trigonometricae et proprietates metricae cuiusvis figurae.

Si de plano euclideo agitur, elemento lineari competunt (inter ceteras formas possibiles) sequentes espressiones (cfr. Append. III, n. 24) :

(coord. cartes. orthog.) $ds^2 = dx^2 + dy^2$
(coordin. polares) $ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2$
(coordin. cartes. obliq.) $ds^2 = dx^2 + 2\cos\theta\, dx \cdot dy + dy^2$

Generalior vero expressio ipsius elementi linearis (respectu cuiusvis systematis coordinatarum) sequentis typi est :

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2\, F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 \tag{I}$$

in qua formula E, F, G denotant coëfficientes qui possunt etiam continuo variari pro variis punctis plani.

Ut patet praecedentes expressiones elementi linearis sunt tot casus particulares expressionis generalis (I), cuius coëfficientes E, F, G sint :

$$\begin{array}{lll} E = 1 & F = 0 & G = 1 \\ E = 1 & F = 0 & G = \varrho^2 \\ E = 1 & F = \cos\theta & G = 1 \end{array}$$

Eadem expressio (I) valet etiam ad significandum elementum lineare supra superficies curvas : colligitur ex expressione cartesiana :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ratione habita de relationibus inter incrementa infinitesima $dx\, dy\, dz$ coordinatarum cartesianarum $x\, y\, z$ et incrementa $du\, dv$ parametrorum $u\, v$; quae relationes (implicitae in aequationibus $f_u\,(x,y,z;u) = 0$ $f_v\,(x,y,z;v) = 0$ linearum coordinatarum) colliguntur auxilio calculi differentialis.

Sepositis vero computationibus ad normam calculi differentialis, forma (I) elementi linearis (pro quavis superficie curva) facile declaratur si comparantur lineae coordinatae cartesianae (obliquae) in plano Π et earum proiectiones curvae supra superficiem curvam σ prout indicat fig. 8.

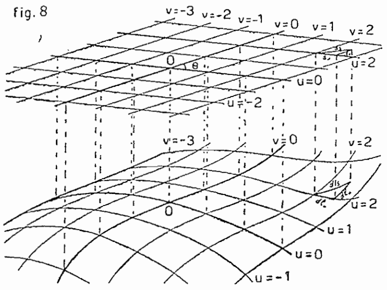
Etenim, si de plano Π agitur et de coordinatis cartesianis obliquis, elementum lineare scribitur :

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2 \tag{I_Π}$$

et lineae coordinatae sunt duo systemata rectarum parallelarum $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Proiectiones autem harum rectarum supra σ componunt duo systemata linearum curvarum. Quod si hae lineae curvae designantur iisdem parametris $u\ v$ ac relativae lineae rectae plani Π, et si ad exprimendum elementum lineare supra σ adhibetur eadem (I_{Π}), manifesto colliguntur non iam extensiones linearum supra σ, sed extensiones linearum homologarum supra π.

fig. 8



Si vero aestimandae sunt longitudines linearum supra σ, possumus interim scribere :

$$(\mathrm{I}'_\sigma) \qquad ds^2_\sigma = dl^2_{u\sigma} = 2 \cos \theta_\sigma \cdot dl_{u,\sigma}\ dl_{v,\sigma} + dl^2_{v,\sigma}$$

in qua formula $dl_{u,\sigma}$ $dl_{v,\sigma}$ indicant longitudines elementares linearum coordinatarum supra σ, et θ angulos quos ipsae lineae coordinatae efformant.

Stant autem relationes sequentes :

$$(\mathrm{I}') \qquad dl_{u,\sigma} = \sqrt{E}\, du \qquad\qquad dl_{v,\sigma} = \sqrt{G}\, dv$$

in quibus relationibus E et G indicant coëfficientes iuxta quos elementa linearia $du\ dv$ plani deformantur per proiectionem sui supra σ.

Positis vero his expressionibus in (I'_σ), colligimus (ut declarandum erat) :

$$(\mathrm{I}'_\sigma) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= E\, du^2 + 2 \cos \theta_\sigma \cdot \sqrt{E} \cdot \sqrt{G} \cdot du \cdot dv + G\, dv^2 \\ &= E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 \end{aligned}$$

In ultima expressione positum est :

$$F = \cos \theta_\sigma \cdot \sqrt{E} \cdot \sqrt{G}$$

Factor $\cos\theta$ ostendit coëfficientem F deficere (seu $F = 0$) quoties lineae coordinatae mutuo se secant iuxta angulum rectum.

Coëfficientes denique E et G reducuntur ad unitatem quoties lineae coordinatae ($v =$ const.; $u =$ const.) sunt lineae geodeticae (i. e. lineae minimae distantiae) et coordinatae u, v sunt ipsae longitudines segmentorum geodeticorum (a definita origine computatae) ; tunc enim stant sequentes condiciones :

$$(dv = 0) \qquad ds^2 = E \cdot du^2 \qquad ds = du$$
$$(du = 0) \qquad ds^2 = G \cdot dv^2 \qquad ds = dv$$

quare necessario est :

$$E = 1 \qquad G = 1$$

Ut exemplo hae res illustrentur consideretur superficies sphaerica (fig. 9) :

— meridiani et paralleli constituant lineas coordinatas ;

— coordinata u puncti P sit ipsa longitudo arcus meridiani inter lineam aequatorialem et punctum P ;

— coordinata v exprimat tractum lineae aequatorialis inter determinatam originem O et punctum P' in quo meridianus per P secat aequatorem ($u = O$).

Elemento lineari competit sequens forma :

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R}\, dv^2$$

nam :

$$ds^2 = du^2 + dl^2$$

$$dl : dv = R \cos \frac{u}{R} : R$$

$$dl = \cos \frac{u}{R} \cdot dv$$

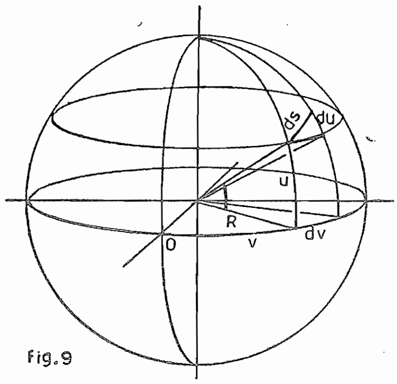


fig.9

Haec expressio elementi linearis sphaerae manifesto congruit cum expressione generali (I_σ), in qua nihilominus posita sunt peculiaria parametra E, F, G :

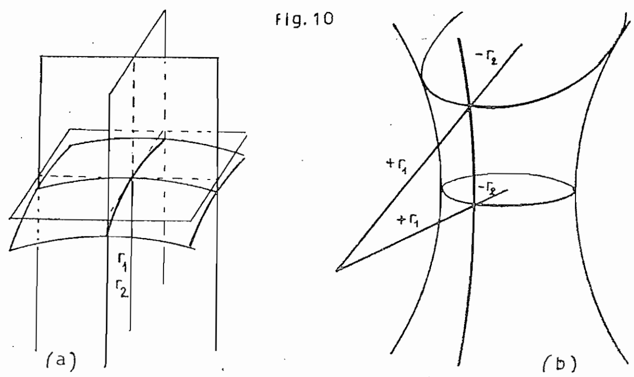
$E = 1$ quia meridiani sunt lineae geodeticae, et coordinata u est ipsa longitudo meridianorum ;
$F = 0$ quia meridiani et paralleli (lineae coordinatae) mutuo se secant iuxta angulum rectum ;
$G \neq 1$ quia paralleli (excepto aequatore) non sunt lineae geodeticae ; coordinata denique v non mensuratur supra singulos parallelos, sed tantum supra aequatorem. Est nihilominus $G = 1$ iuxta aequatorem (lineam geodeticam), quia ibi $u = 0$, $\cos u/R = 1$, et $ds = dv$.

15. Curvatura superficierum.

Curvatura est nota praecipua superficierum : ipsa est quae determinat typum elementi linearis, et consequenter omnes relationes metricas supra superficies.

Curvatura superficierum potest sub pluribus aspectibus declarari et definiri.

a. *Declaratur in primis* (adhibitis consuetis notionibus spatii euclidei*) *per eam peculiarem flexionem, vi cuius superficies curva discedit a quodam plano, quod tangit tantum uno suo puncto* P : qui contactus punctiformis talis est ut nullo pacto



* Iure adhibentur notiones euclideae, quarum interna cohaerentia comprobata iam manet. Ceteroquin mox dabitur alia definitio curvaturae, quae non pendet ex postulato euclideo et quae propterea sine exceptione stat.

superficies possit (per flexionem sui) magis adhaerere plano tangenti, vel per minimam extensionem continuam circa P. Quare id genus flexionis superficiei « curvae » prorsus differt, ex. gr., a flexione cylindri, qui adhaeret plano tangenti per integram rectam, et qui potest etiam evolvi et ex toto applicari plano.

Ratio illius peculiaris flexionis superficiei « curvae » ad hoc revocari potest : *in quolibet suo puncto « curvo » superficies exhibet duas sectiones peculiares — « praecipuas » denominatas* * *— quae sunt utraeque curvae* (fig. 10).

Curvatura superficiei dicitur positiva si utraeque sectiones praecipuae exhibent suam convexitatem versus eandem partem plani tangentis (fig. 10, a) ; *datur vero curvatura negativa quoties convexitates sectionum praecipuarum spectant duas partes oppositas* (fig. 10, b).

b. *Curvatura superficierum definienda est etiam sub aspectu quantitativo :* statuenda scilicet est regula ad illam mensurandam.

Ad hunc finem *considerantur bini radii curvaturae* $r_1\, r_2$**

---

* Sectiones « praecipuae » superficiei curvae sunt eae sectiones (rectae) quarum radii curvaturae gaudent positione « stationaria » : sunt scilicet inferiores (aut superiores) radiis omnium ceterarum sectionum quae haberi possunt in regione adiacenti sectionibus praecipuis.

Quod sicubi non dantur sectiones rectae diversimode curvae (ut contingit ubique pro sphaera), omnes sectiones sunt pariter « praecipuae ».

Binae sectiones praecipuae sunt orthogonae inter se.

** Si sectio superficiei — per tractum infinitesimum circa quoddam suum punctum P — exhibet formam circularem, radius curvaturae illius sectionis in P est ipse radius illius circuli.

Si vero forma sectionis s circa P non est circularis, ad aestimandum eius radium curvaturae in P, considerandus est alius peculiaris circulus (circulus « osculator » denominatus), qui in illo puncto P, confunditur cum sectione s per tractum infinitesimum ; radius autem huius circuli definit (suo reciproco) curvaturam sectionis s in P.

Circulus « osculator » (una cum suo radio) deducitur ex ipsa forma sectionis s certis regulis calculi differentialis : agitur de circulo qui obtemperat sequentibus tribus condicionibus :

a) habet punctum P commune cum sectione curva s ;

b) in P, una eademque est recta tangens circuli osculatoris et lineae s ;

binarum sectionum praecipuarum ; curvaturae singularum sectionum exprimuntur per numeros reciprocos $1/r_1$, $1/r_2$ (curvatura enim variatur ratione inversa ac radius curvaturae) ; *curvatura denique superficiei exprimitur per productum* $1/r_1 \cdot r_2$.

Congruenter cum iis quae iam dicta sunt de curvatura positiva aut negativa, si duo radii curvaturae $r_1 r_2$ procedunt in eandem directionem, idem signum eis competit, eorum productus est positivus, et habetur curvatura (K) positiva $K = 1/r_1 \cdot r_2$; si vero duo radii procedunt in directiones oppositas, diversa sunt eorum signa et habetur curvatura negativa $K = -1/r_1 \cdot r_2$.

Si productus $r_1 \cdot r_2$ *binorum radiorum est ubique idem, superficies gaudet ubique curvatura constanti, quae potest esse positiva aut negativa :* $K = \pm 1/R^2$.

Superficies sphaerica exhibet ubique curvaturam constantem positivam $K = 1/R^2$ (R = radius sphaerae = radius omnium sectionum rectarum).

Curvatura potest manere immutata etiamsi radii curvaturae varientur, dummodo varientur ratione inversa ita ut immutatus permaneat eorum productus.

c. *Curvatura superficierum* (quae iam definita est per binos radios $r_1 r_2$, qui stant extra superficiem) *definitur etiam et praecipue per elementa interna superficierum ;* quae definitio manifestat curvaturam esse proprietatem internam superficierum, quae iam referenda non est ad proprietates euclideas spatii externi.

Haec nova definitio curvaturae statim sequitur peculiarem eius proprietatem a Gauss demonstratam ; scilicet :

Curvatura superficierum exprimit proportionem inter exces-

---

c) intra ambitum infinitesimum circa P, pari ratione variatur inclinatio tum tangentis circuli osculatoris tum tangentis lineae curvae s.

Quae condiciones — iuxta locutiones proprias calculi differentialis — ita exprimuntur : sectio s et eius circulus osculator in P habent ipsum punctum P commune ;praeterea, in ipso puncto P, habent parem derivatam primam et parem derivatam secundam. Quae tres condiciones sufficiunt ad definiendum radium r circuli osculatoris, et consequenter curvaturam $1/r$ sectionis s in P.

sum geodeticum et aream triangulorum geodeticorum (supra ipsas superficies descriptorum) ; scilicet :

$$K = \frac{\text{Excessus geodeticus}}{\text{Area trianguli}} = \frac{A + B + C - \pi}{\Sigma}$$

$$A + B + C - \pi = K \cdot \Sigma$$

Talis curvatura manifesto est positiva aut negativa prout positivus aut negativus est excessus geodeticus.

Haec nova definitio curvaturae plane congruit cum praecedentibus ; quare, si agitur ex. gr. de sphaera spatii euclidei, pro quovis eius triangulo geodetico stat relatio :

$$A + B + C - \pi = \frac{1}{R^2} \cdot \Sigma$$

$$\Sigma = R^2 (A + B + C - \pi)$$

Item dicatur quoad superficies, quarum curvatura definiatur per duos distinctos radios curvaturae sectionum.*

16. Relatio inter curvaturam et elementum lineare.

Ut ipse Gauss demonstravit, *definitus nexus analyticus*** *stat inter curvaturam superficierum et illas functiones* E, F, G, *quibus constituitur elementum lineare.*

---

* Simplicitatis causa, rem declaravimus supponendo curvaturam manere constantem per superficiem (sicut contingit pro sphaera) ; sed proprietates expositae pariter stant etiamsi superficies gaudeat diversa curvatura in diversis suis punctis : Gauss demonstravit hanc proprietatem generalem.

Si curvatura est varia, considerandi prius sunt tot trianguli infinitesimi, per quorum aream $d\sigma$ curvatura censeri potest plane definita ; pro his singulis triangulis stat relatio :

$$A + B + C - \pi = K \cdot d\sigma$$

Fit dein summa integralis horum elementorum infinitesimorum, et colligitur relatio pro triangulis finitis ; scilicet :

$$A + B + C - \pi = \int K \cdot d\sigma$$

** Nexus analyticus inter curvaturam superficierum et coëfficien-

Aliis verbis : dato quodam elemento lineari, definitae operationes calculi differentialis deducunt ex functionibus E, F, G curvaturam superficiei ; quae curvatura potest esse ubique eadem aut etiam varia.

Praeterea, *quantumvis statuantur — supra unam definitam superficiem — diversa systemata coordinatarum*, et varientur consequenter expressiones elementi linearis (mutatis scilicet functionibus E, F, G), *non colligitur* — per operationes illas — *nisi una definita distributio curvaturae* (constans aut varia), quae unice pendet ex modo quo superficies evolvitur.

Hac de causa curvatura dicitur functio « absoluta » superficiei, et functio « invarians » variorum elementorum linearium. Et tota varietas elementorum linearium, quae potest statui supra unam definitam superficiem, revocatur ad unum typum, ex quo deducitur eadem curvatura superficiei.

17. Curvatura et superficies mutuo applicabiles.

Ex expositis sequitur nova proprietas :

Mera flexio superficierum non mutat curvaturam :* non alterat enim ea elementa intrinseca superficiei (ut areas, angulos, ...) quae definiunt curvaturam.

Quare etiam colligitur sequens condicio : si curvatura refertur ad binos radios externos r_1, r_2, quoties per flexionem alter radius imminuitur, simul alter radius inversa ratione crescit, ita ut invariatus permaneat eorum productus $r_1 \cdot r_2$, et consequenter etiam curvatura $1/r_1 \cdot r_2$.

Hae praerogativae curvaturae — quae est proprietas interna superficierum, quae neque variatur per earum flexiones — statim nos ducit ad alia consectaria colligenda :

---

tes E, F, G elementi linearis non est simplex, et exprimitur per operationes proprias calculi infinitesimalis. Obtinet nihilominus expressiones simpliciores in peculiaribus adiunctis, nominatim cum $E = 1$, $F = 0$: cfr. n. 19 notam.

* Superficies dicitur mere « flecti » si, quantumvis diversimode torqueatur, non alterantur eius internae extensiones linearum, arearum, angulorum ... (ut contingeret per dilatationes et compressiones elasticas), nec producuntur cuspides (ut contingeret si superficies abrupte plicaretur).

a) *Duae superficies, quae possint mutuo applicari per meram flexionem sui, gaudent pari curvatura :* par enim est curvatura cum duae superficies inter se adhaerent ; neque earum curvaturae mutantur per separationem et per meras flexiones ipsarum superficierum.

b) *Vicissim : duae superficies, quae gaudeant pari curvatura, possunt mutuo applicari per meram flexionem sui :* quoties enim curvaturae sunt pares, pares etiam sunt extensiones et formae figurarum (in primis triangulorum geodeticorum) ; quae figurae propterea possunt mutuo applicari sine alteratione suarum extensionum, sed per meras flexiones.

Haec mutua applicatio fieri potest, pro variis adiunctis, maiori aut minori libertate :

— si duae superficies gaudent ubique una eademque curvatura, earum mutua applicatio fieri potest omnimoda libertate ; i. e. :

(1) quodlibet punctum P' superficiei σ' potest applicari cuilibet puncto P'' superficiei σ'' (quae applicatio produci potest in ∞^2 modis, pro duabus coordinatis punctorum quae seiunctim variari possunt) ;

(2) quodlibet segmentum geodeticum egrediens ex P' (in quamlibet directionem) applicari potest cuilibet segmento geodetico egredienti ex P''.

Quare haec mutua applicatio superficierum potest fieri in ∞^3 modis, seu iuxta 3 gradus libertatis.

— Si curvatura superficierum applicandarum non est una eademque per totam earum extensionem, non omnes partes duarum superficierum possunt ad libitum applicari, sed illae solae quae gaudent pari curvatura.

c) Hae ipsae proprietates referri possunt (non iam ad duas superficies mutuo applicandas) sed ad unam superficiem transferendam supra seipsam ; scilicet :

— *Superficies praedita curvatura constanti potest libere transferri supra seipsam* (iuxta 3 gradus libertatis) sine ulla alteratione suarum extensionum et figurarum, sed — ad summum — per meram flexionem sui.

— *Si curvatura superficiei non est ubique eadem, eius translatio supra seipsam generatim impeditur ;* potest nihilominus fieri in peculiarem directionem (uno gradu libertatis) si curvatura exhibet tot mensuras constantes iuxta peculiares lineas (aequidistantes) quas puncta superficiei possunt simul percurrere.

Exempla rem illustrant :

— *Superficies sphaerica* potest omnimoda libertate transferri supra seipsam (3 gradibus libertatis) ; neque producitur ulla eius flexio.

— Quaevis *superficies rotunda* (generata ex rotatione cuiusdam lineae circa definitum axem) verti potest supra seipsam, rotando circa eundem axem ; quod fieri potest quatenus curvatura superficiei — etsi varia iuxta meridianos — servat tot immutatas mensuras iuxta parallelos.

— *Si linea generatrix superficiei rotundae habet talem formam quae generet unam eandemque curvaturam per totam superficiem, ipsa superficies potest transferri supra seipsam triplici gradu libertatis :*

1) potest in primis rotari circa suum axem, ita ut unumquodque punctum percurrat suum parallelum (quae translatio superficiei supra seipsam fit sine ulla eius flexione).

2) ipsa superficies potest ita transferri supra seipsam ut quoddam eius punctum (ad libitum eligendum) percurrat suum meridianum (quae translatio generatim non fit sine flexione).

3) tandem superficies potest verti supra seipsam rotando circa datum eius punctum (generatim non sine flexione).

Superficies cylindrica (cui competit curvatura constans nulla) exemplum praebet superficiei quae potest transferri supra seipsam triplici gradu libertatis.

Superficies rotundae, repraesentatae in figuris 11 et 12 alia exempla praebent.

Caput IV

INTERPRETATIO GEOMETRIAE LOBACEWSKI-BOLYAI PER « PSEUDOSPHAERAS » : OPUS EUGENII BELTRAMI

18. Superficies idoneae ad solvendum problema: praeditae curvatura constanti negativa: « pseudosphaerae ».

Eugenius Beltrami (a. 1868) *produxit conspicuam interpretationem geometriae non euclideae* (Lobačewski-Bolyai) *definiendo peculiares superficies, « pseudosphaeras », quarum geometria interna reproducit geometriam hyperbolicam ea ipsa ratione qua superficies sphaericae imaginem constituunt geometriae non euclideae ellipticae* (cfr. nn. 3 ; 4 ; 8). Scilicet : propositiones geometriae hyperbolicae vertuntur in proprietates superficiei pseudosphaericae si pro « recta » plani hyperbolici ponitur « linea geodetica » pseudosphaerae ; nominatim trianguli geodetici pseudosphaerae exhibent easdem internas relationes metricas ac trianguli rectilinei in plano Lobačewski-Bolyai.

Ut problema solveret, Beltrami primo accurate comprobavit congruentiam quae stat inter geometriam non euclideam hyperbolicam et geometriam superficiei praeditae curvatura negativa.

Haec congruentia iam satis apparet ex analogia intercedente inter geometriam sphaericam et geometriam hyperbolicam ; consideremus nominatim relationem inter aream et angulos triangulorum geodeticorum ; scilicet :

in geometria sphaerica

$$\Sigma = R^2 (A + B + C - \pi) \qquad R = \text{radius sphaerae}$$

in geometria hyperbolica

$$\Sigma = k^2 (\pi - A - B - C) \qquad k = \text{coëfficiens gaussianus}$$

Cum vero formulae trigonometriae hyperbolicae deducantur ex formulis geometriae sphaerae si pro radio R ponitur radius imaginarius iR, scribi etiam potest :

in geometria sphaerica :

$$\Sigma = R^2 \ (A + B + C - \pi) \qquad \left.\begin{matrix}\text{excessus}\\ \text{geodeticus}\\ \text{positivus}\end{matrix}\right\}$$

in geometria hyperbolica :

$$\begin{aligned}\Sigma &= (iR)^2 (A + B + C - \pi)\\ &= - R^2 (A + B + C - \pi)\end{aligned} \qquad \left.\begin{matrix}\text{excessus}\\ \text{geodeticus}\\ \text{negativus}\end{matrix}\right\}$$

Ultima formula confirmat excessum geodeticum $A + B + C - \pi$ esse negativum (seu $A + B + C < \pi$) : areae enim trianguli necessario competit mensura positiva.

Formulae utriusque geometriae simul exhiberi possunt sequenti ratione :

$$\frac{\text{Excessus geodeticus}}{\text{Area trianguli}} = \frac{A + B + C - \pi}{\Sigma} = \pm \frac{1}{R^2}$$

Iamvero $+ 1/R^2$ exprimit curvaturam constantem positivam sphaerae ; analoga igitur ratione $- 1/R^2$ denuntiat curvaturam constantem negativam, qua gaudere debet superficies idonea ad interpretandam geometriam hyperbolicam Lobačewski-Bolyai.

Haec conclusio, iam adumbrata in opere Taurinus, implicita in opere Gauss (qui etiam explicitam mentionem fecit de peculiari pseudosphaera), expressis verbis enunciata anno 1840 a F. Minding, tandem a Beltrami in pleniorem lucem lata est. Hic auctor consideravit in primis typicam formam quae competit elemento lineari* si superficies gaudet curvatura con-

---

* Forma typica elementi linearis (pro curvatura $-1/R^2$) est :

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{Ch}^2 \frac{u}{R}\, dv^2 \tag{1}$$

quae omnino analoga est elemento lineari sphaerae :

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R}\, dv^2$$

stanti negativa ; dein, per varias operationes calculi, pervenit ad exprimendum ens analyticum bidimensionale, cuius proprietates manifesto congruebant cum proprietatibus geometriae Lobačewski-Bolyai.

Opus Eugenii Beltrami vim et claritatem addidit conclusionibus quas iam produxerant primi auctores geometriae non euclideae : isti enim elaboraverant abstractum systema analyticum interpretans internas relationes metricas plani hyperbolici ; Beltrami vero exhibuit definitum ens geometricum (superficiem scilicet curvam spatii euclidei) repraesentans eandem geometriam non euclideam.

19. Superficies pseudosphaericae rotundae.

Inter varias superficies pseudosphaericas (praeditas curvatura constanti negativa) *Beltrami speciatim consideravit eas quae generantur ex rotatione cuiusdam lineae curvae* (linea meridiana generatrix) *circa idoneum axem ; plene autem solvit problema definiendo omnes possibiles formas talium pseudosphaerarum, quae revocantur ad tres typos* (fig. 11).

Elementum lineare cuiusvis superficiei rotundae (sumptis pro lineis coordinatis meridianis et parallelis) est sequentis typi :

Prima expressio ex altera deducitur si (iuxta notam regulam) pro radio R sphaerae ponitur iR.

In utroque casu linea coordinata $u = 0$ (linea aequatorialis supra sphaeram) est linea geodetica ; lineae $v =$ const. (meridiani supra sphaeram) sunt totidem lineae geodeticae orthogonae lineae $u = 0$. Ceterae lineae coordinatae $u =$ const. (paralleli supra sphaeram) secant iuxta angulum rectum lineas $v =$ const., et sunt tot lineae aequidistantes a linea $u = 0$.

Beltrami deduxerat formulam (1) ex generali expressione elementi linearis

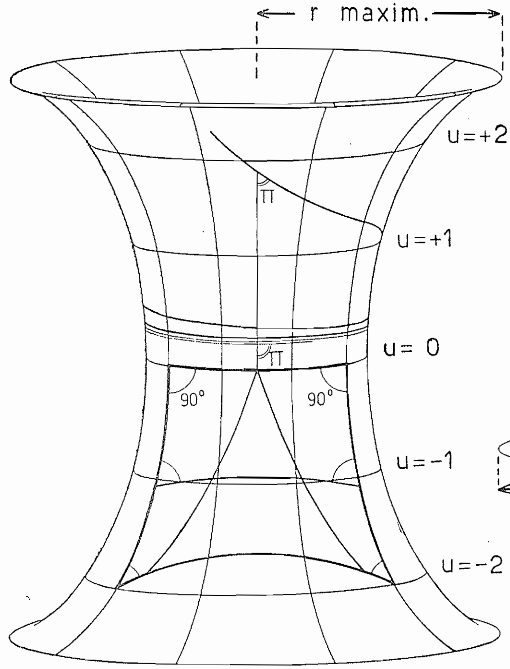
$$ds^2 = du^2 + G^2 \cdot dv^2$$

quae habetur quoties duo systemata linearum coordinatarum sunt orthogona inter se ($F = 0$) et alterum systema (v = const.) constituitur lineis geodeticis iuxta quas mensuratur coordinata u (quare $E = 1$) ; considerata autem relatione inter curvaturam K et functiones E, F, G (quae in praesenti sunt 1, 0, G), colligitur

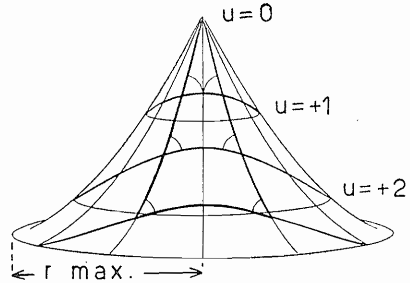
$$G = \mathrm{Ch}^2 \frac{u}{R}$$

ut condicio necessaria qua habeatur $K = 1/R^2$.

$$ds^2 = du^2 + r^2 \cdot dv^2$$



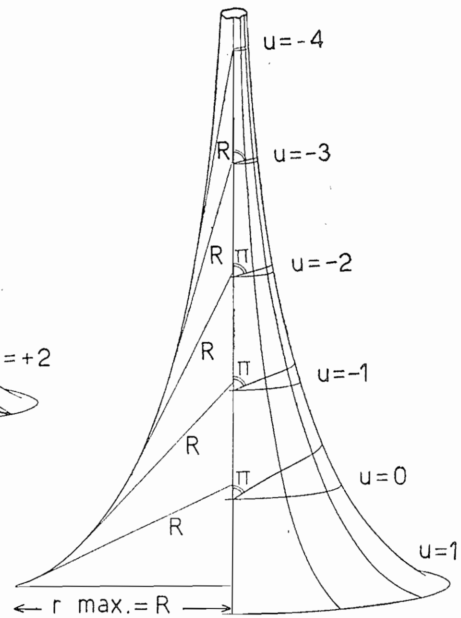
(a) $r = \lambda \cdot ch\,\frac{u}{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ R = 2 \end{array} \right.$



$r = \lambda \cdot sh\,\frac{u}{R}$

$\lambda = 1$; $R = 2$

(b)

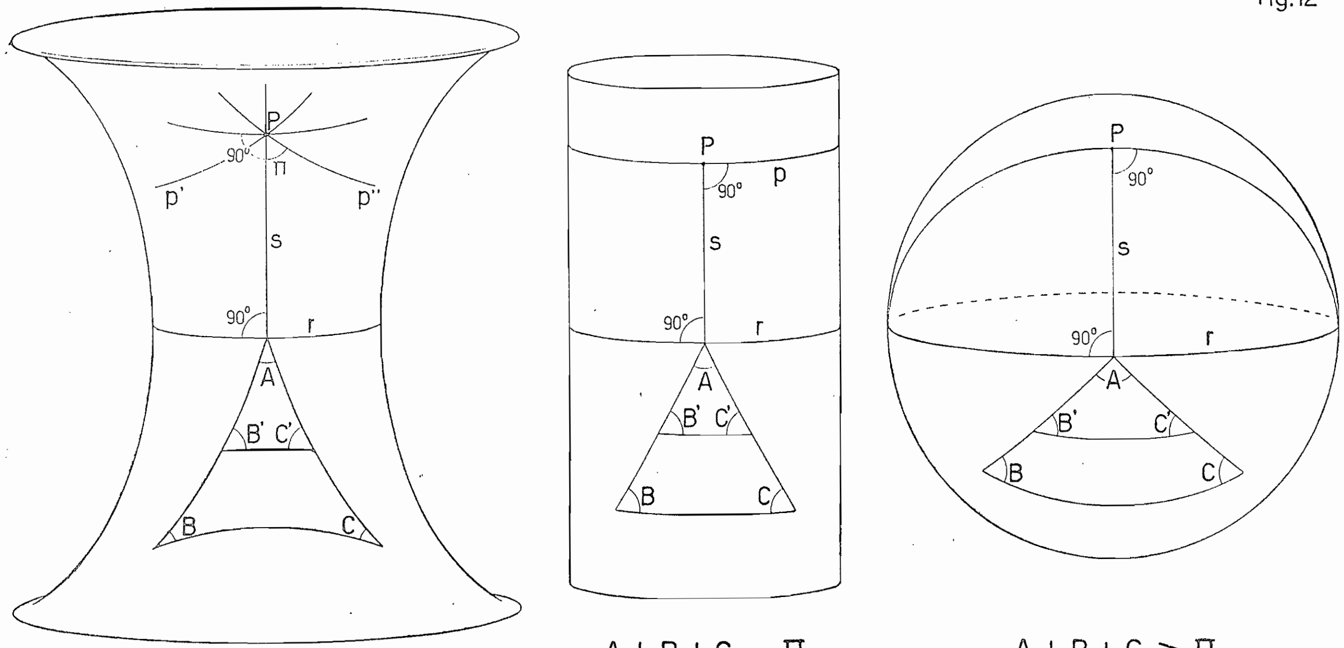


$r = \gamma \cdot e^{\frac{u}{R}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 1 \\ R = 2 \end{array} \right.$ (c)

fig.11

$\underline{\underline{K < 0}}$ $\underline{\underline{K = 0}}$ $\underline{\underline{K > 0}}$

fig.12



$\underline{\underline{A + B + C < \Pi}}$ $\left\{ \begin{array}{l} B < B' \\ C < C' \end{array} \right.$

$\underline{\underline{A + B + C = \Pi}}$

$B = B'$; $C = C'$

$\underline{\underline{A + B + C > \Pi}}$

$B > B'$; $C > C'$

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

in qua formula :

— coordinata u cuiusvis puncti P refert arcum meridiani inter P et certum parallelum (ex quo originem ducunt mensurae arcuum u) ;

— coordinata v exprimit « longitudinem » eiusdem puncti P ;

— functio r exprimit radios variorum parallelorum ; qui radii sunt generatim varii (una superficie cylindrica excepta).

Ut superficiei rotundae competat curvatura constans negativa $K = -1/R^2$, apta forma tribuenda est functioni r. Problema solvitur si consideratur relatio analytica inter curvaturam et functiones E, F, G elementi linearis ; quae relatio analytica reducitur in praesenti casu ($E = 1$; $F = 0$) ad simpliciorem aequationem* cui obtemperare debet sola functio G (seu r^2) ; solutio autem huius aequationis dat tres sequentes expressiones radii r :

(a) $$r = \lambda \operatorname{Ch} \frac{u}{R}$$ (b) $$r = \lambda \operatorname{Sh} \frac{u}{R}$$

(c) $$r = \gamma\, e^{\frac{u}{R}}$$ $\lambda, \gamma =$ coëffic. const.

Quibus functionibus respondent totidem elementa linearia, quae sunt :

(a′) $$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cdot \operatorname{Ch}^2 \frac{u}{R} \cdot dv^2$$ (b′) $$ds^2 = du^2 + \lambda \cdot \operatorname{Sh}^2 \frac{u}{R}\, dv^2$$

(c′) $$ds^2 = du^2 + \gamma^2 \cdot e^{\frac{2u}{R}} \cdot dv^2$$

---

* Si $E = 1$ et $F = 0$, relatio analytica inter curvaturam K et functionem G exprimitur sequenti aequatione differentiali :

$$K = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

quae, in praesenti casu, fit :

$$-\frac{1}{R^2} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}$$

Functio integralis huius aequationis est :

$$r = \gamma_1\, e^{\frac{u}{R}} + \gamma_2\, e^{\frac{u}{R}}$$

et habentur tres typi solutionis prout duo coëfficientes $\gamma_1 \gamma_2$ sunt eiusdem signi aut signi contrarii, aut alteruter fit nullus.

Denique duo coëfficientes $\gamma_1 \gamma_2$ (in primo et secundo casu) reduci possunt ad parem valorem absolutum λ si opportune eligitur initium arcuum u.

Distinguuntur igitur tres typi pseudosphaerarum rotundarum, quarum lineae generatrices statim deducuntur ex expressionibus (a) (b) (c) auxilio tabularum functionum hyperbolicarum $\mathrm{Ch}\, x$, $\mathrm{Sh}\, x$ et functionis exponentialis e^x.

Figura 11 *exhibet hos tres typos pseudosphaerarum, quorum primus et secundus dicuntur, propter ipsas formas pseudosphaerarum, typus anularis et typus conicus ; tertius autem distinguitur propter peculiarem proprietatem lineae generatricis, « tractricis » denominatae :* constanter idem est segmentum lineae tangentis comprehensum inter punctum tangentiae et axem rotationis ; de hoc typo speudosphaerae iam mentionem fecerat Gauss. Pro variis coëfficientibus λ et γ pseudosphaerae acquirunt formam magis vel minus latam aut elatam ; curvatura vero pendet ex uno parametro R.*

Ipsae figurae 11 a, b, c clare exhibent bina systemata linearum coordinatarum, respondentia variis expressionibus a', b', c' elementi linearis : in quovis casu prius systema linearum coordinatarum constituitur lineis meridianis (quae sunt lineae geodeticae), et alterum systema constituitur parallelis (orthogonis lineis meridianis) ; diversae vero sunt in tribus casibus formae meridianorum et eorum mutuae positiones :

— in casu a : meridiani sunt omnes orthogoni uni parallelo praedito radio minimo (qui est linea geodetica).
— in casu b : meridiani egrediuntur ex uno vertice.
— in casu c : meridiani sunt paralleli inter se, quatenus eorum punctum commune recessit ad distantiam infinitam.

Tria elementa linearia (a') (b') (c'), *quae competunt tribus pseudosphaeris rotundis, sunt ea ipsa quae competunt plano hyperbolico*

---

* Curvatura aestimanda est iuxta generalem relationem

$$K = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\,.$$

functioni autem $\sqrt{G}$ tribuendae sunt tres expressiones (a) (b) (c) : coëfficientes λ et γ eliminantur cum appareant in numeratore et denominatore ; colligitur autem in omni casu $K = -1/R^2$.

Pseudosphaeris figurae 11 tributa sunt sequentia parametra : $R = 2$; $\lambda = 1$; $\gamma = 1$.

Lobačewski-Bolyai et colliguntur ex ipsis eius proprietatibus si eliguntur sequentia systemata linearum coordinatarum :

	Primum systema	*Secundum systema*
(a)	— lineae rectae orthogonae uni eidemque rectae : i. e. : *fascis* « *idealis* » *rectarum* ;	— lineae orthogonae fasci ideali rectarum : i. e. : « *hypercycli* » ;
(b)	— lineae rectae egredientes ex uno puncto : i. e. : *fascis* « *proprius* » *rectarum* ;	— lineae orthogonae fasci proprio rectarum : i. e. : « *cycli* » ;
(c)	— lineae rectae parallelae (in unam directionem) : i. e. : *fascis* « *improprius* » *rectarum.*	— lineae orthogonae fasci improprio rectarum : i. e. : « *oricycli* ».

20. Par geometria supra planum hyperbolicum et pseudosphaeras.

Congruentia inter duas geometrias, quae ex dictis iam satis apparet, sequentibus animadversionibus illustratur.

a. Superficies isometricae et mutuo applicabiles.

Omnes internae proprietates metricae superficierum colliguntur velut in synthesi in earum elemento metrico lineari (cfr. nn. 14, 15) ; iamvero tum plano hyperbolico tum pseudosphaeris competit unum idemque elementum lineare typicum, ex quo pariter colligitur curvatura constans negativa (cfr. n. 19).

Isometria est absolute eadem si pares sunt duae curvaturae negativae (cfr. n. 15) : quo in casu superficies possunt mutuo applicari (per meras flexiones sui) iuxta tres gradus libertatis ; sicut planum euclideum (praeditum curvatura nulla) applicari potest superficiei cylindricae (cui etiam competit curvatura nulla), ita planum hyperbolicum (praeditum definita curvatura — $1/R^2$) applicari potest cuivis pseudosphaerae, quae gaudeat eadem curvatura.

b. Paria systemata linearum coordinatarum.

Quoties duae superficies mutuo applicari possunt, earum geometriae internae manifesto referri possunt ad paria systemata linearum coordinatarum. Haec congruentia nihil addit isometriae duarum superficierum, sed illam conspicue illustrat.

De paribus systematibus linearum coordinatarum quae statui possunt supra pseudosphaeras et planum hyperbolicum iam dictum est in praecedenti paragrapho ; iuverit nihilominus ea omnia in uno conspectu videre :

Exempla parium linearium coordinatarum

in pseudosphaeris rotundis :	*in plano hyperbolico :*
a. $ds = du^2 + \lambda^2 \mathrm{Ch}^2 \dfrac{u}{R} dv^2$	
1. *meridiani orthogoni uni lineae geodeticae*	1. *fascis idealis rectarum*
2. *paralleli*	2. *hypercycli*
b. $ds^2 = du^2 + \lambda^2 \mathrm{Sh}^2 \dfrac{u}{R} dv^2$	
1. *meridiani egredientes ex uno vertice*	1. *fascis proprius rectarum*
2. *paralleli*	2. *cycli*
c. $ds^2 = du^2 + \gamma^2 \cdot e^{\frac{2u}{R}} \cdot dv^2$	
1. *meridiani paralleli*	1. *fascis improprius rectarum*
2. *paralleli*	2. *oricycli.*

Planum igitur hyperbolicum potest ita circumvolvi et applicari pseudosphaerae typi anularis (supposita pari curvatura) ut quidam eius fascis idealis rectarum applicetur meridianis superficiei rotundae ; simul autem hypercycli (orthogoni dicto fasci rectarum) applicantur parallelis pseudosphaerae.

Similia dicantur si planum hyperbolicum circumvolvitur ceteris typis pseudosphaerarum.

c. Proprietates characteristicae plani hyperbolici reproductae supra pseudosphaeras.

Figura 11 *satis has proprietates illustrat ;* scilicet :

1. Data linea geodetica, per puncta ei externa ducuntur binae lineae geodeticae, quae — quantumvis protrahantur — priorem numquam attingunt.

2. Quadrangulus birectangulus isosceles completur duobus angulis rectis.

3. In triangulis geodeticis summa angulorum minor est quam duo recti ; qui defectus geodeticus crescit una cum area trianguli.

4. Non dantur figurae similes.

Figura 12 *denuo reproducit has ipsas proprietates superficiei pseudosphaericae, illas comparando cum proprietatibus geometriae euclideae et ellipticae, quas exhibent cylindrus et sphaera.* Qui conspectus superficierum ostendit ordinatam rationem qua obtinentur proprietates geometriae hyperbolicae, parabolicae (euclideae) aut ellipticae prout curvatura superficierum est negativa, nulla aut positiva.

21. Interpretationes nondum completae geometriae non euclideae.

Congruentia inter geometriam hyperbolicam et geometriam pseudosphaerarum non est sine limitibus et exceptionibus. Planum enim hyperbolicum in infinitum extenditur, dum pseudosphaerae sunt superficies finitae et limitatae ; quare non repraesentant nisi delimitatas regiones plani hyperbolici.

Haec imperfecta capacitas interpretandi geometriam non euclideam affirmanda non est de solis pseudosphaeris rotundis a Beltrami definitis (quae omnes exhibent cuspides limitantes earum evolutionem*), sed — ut Hilbert demonstravit — est condicio necessaria cuiusvis superficiei curvae (spatii euclidei)

* Ponunt hos limites vertex in pseudosphaera typi conici et omnes lineae circulares maximae, praeter quas superficies nequeunt evolvi quin eis deficiat curvatura constans negativa. Hi termini dantur statim ac recta tangens lineae meridianae fit orthogona axi superficiei rotundae.

praeditae curvatura negativa : nullo pacto ea potest in infinitum extendi.

Distinguendae igitur veniunt duae series proprietatum entium geometricorum : proprietates metricae et proprietates « topologicae ».

Proprietates metricae (spectantes mensuras et relationes inter mensuras) eae sunt quae virtute continentur in expressione elementi linearis infinitesimi ; quare directe et generatim affirmantur de solis delimitatis regionibus infinitesimis circa distincta puncta. Proprietates vero topologicae spectant integrum ens geometricum, et nominatim rationes quibus eius partes evolvuntur et connectuntur inter se.

Iamvero *congruentia inter geometriam pseudosphaericam et geometriam hyperbolicam* tota innititur pari expressioni elementi linearis ; quare *directe spectat solas proprietates metricas. Quod si attendimus ad proprietates configurationis, illas invenimus diversas.*

Ex. gr. : in plano hyperbolico duae rectae quae se secant non habent nisi unum punctum commune ; supra pseudosphaeras vero linea meridiana pluribus in punctis secatur ab alia linea geodetica quae paulatim ascendat ut elicoides. Hanc reiteratam intersectionem earundem linearum geodeticarum facile illustrat simile exemplum, simplicius et magis notum, superficiei cylindricae : per infinitas vices linea geodetica elicoidalis secat lineam rectam meridianam.

Item manifestant diversas proprietates configurationis illae diversae rationes quibus nectuntur inter se variae regiones plani hyperbolici et variae partes pseudosphaerarum : illae ita connectuntur ut in infinitum extendant planum ; alterae vero ita connectuntur inter se ut nequeant superare certos terminos.

Ut plene igitur absolvatur opus priorum auctorum geometriae non euclideae (cfr. n. 12) *necnon Eugenii Beltrami, producendae sunt perfectiores interpretationes plani hyperbolici, quae exprimant — per ens geometricum et non per solum ens analyticum — omnes proprietates non euclideas, tum metricas tum topologicas.*

Desiderantur etiam interpretationes non mere bidimensionales, sed etiam tridimensionales (cfr. n. 12) : facile enim intelligitur qua ratione lineae geodeticae superficiei curvae exhibere possint relationes metricas non euclideas ; sed declarandum restat quo pacto hoc fieri possit cum lineae geodeticae superficierum sunt etiam tales (i. e. : lineae minimae distantiae) per liberum spatium.

Tandem non solae interpretationes spatiorum non euclideorum considerandae sunt, sed ipsa spatia quae per se gaudeant natura non euclidea.

De his omnibus tractant sequentes partes II et III.

Appendix I

22. De numeris imaginariis et complexis.

a. Unitas imaginaria $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ ut ens logicum.

Nonnumquam operationes algebricae dant numerum negativum sub signo radicis secundae ; ita, ex. gr., operationes resolventes aequationem secundi gradus :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

quoties $4ac > b^2$.

Non datur vero inter numeros « reales », sive positivos sive negativos, numerus qui — multiplicatus per seipsum — det productum negativum ; quare omnes scripturae algebricae huius generis exprimunt condicionem cui numeri « reales » obtemperare nequeunt.

Talis condicio referri semper potest ad unum factorem $\sqrt{-1}$; quaelibet enim expressio negativa contenta sub signo

radicis secundae scribi potest ut productus cuiusdam factoris « realis » et factoris $\sqrt{-1}$:

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{-1 \cdot a^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{-1} \cdot a$$

Factor autem $\sqrt{-1}$, quamvis non significet numerum realem, non destituitur tamen omni significatione : renuntiat enim quandam peculiarem condicionem, cui numeri reales non obtemperant ; talis autem conditcio nequit dici et ipsa « non realis », et quae numeris realibus nequeat exprimi.

Consideretur, ex. gr., problema geometricum de intersectione inter circulum et rectam ; tres condiciones dari possunt :

a) linea recta secat circulum in duobus punctis distinctis ;

b) linea recta tangit circulum in uno puncto ;

c) linea recta manet externa circulo : eum neque secat, neque tangit.

Ipsum problema potest poni sub forma aequationis algebricae secundi gradus (v. Append. III n. 24, c. 3), et coordinatae punctorum intersectionis eae sunt quae solvunt aequationem ; iamvero, prout formula resolutionis dat $4ac \lesseqgtr b^2$, habentur duo distincta puncta intersectionis, unum au nullum. Qui ultimus casus dicit quidem nullos numeros reales solvere problema, sed etiam indicat quandam peculiarem condicionem « realem », quae significatur numeris « realibus » eruendis ex ipsa expressione algebrica problematis, scilicet : distantia rectae a centro circuli maior est quam eius radius.

Potest igitur factor $\sqrt{-1}$ accipi saltem ut « ens logicum », admittendum in discursu algebrico, quod indicat quandam impossibilitatem solvendi problema algebricum auxilio numerorum realium, et quod etiam logice et algebrice nectitur cum condicione « reali » impediente solutionem.

Denotetur igitur breviter expressio $\sqrt{-1}$ littera i, quae denominatur « unitas imaginaria » ; congruenter cum eius definitione, hic symbolus ita tractandus est ut — elevatus ad potentiam secundam — det unitatem realem negativam :

$$i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$$

Similiter servandae sunt sequentes regulae algebricae :

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i \; ; \quad i^4 = (-1)^2 = 1 \; ; \quad i^5 = i^4 \cdot i = +i$$
$$i/i = 1$$

Quare unitas imaginaria potest per ipsum discursum algebricum eliminari ; quod contingit quoties elevatur ad potentiam ordinis paris, aut dividitur per seipsam.

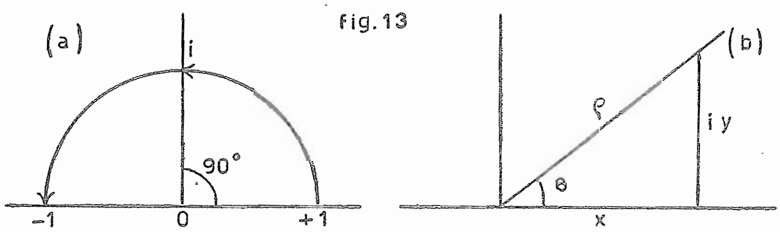
Tales autem processus algebrici (servantes expressionem $\sqrt{-1}$) fructuose ducunt — necnon per rapidiorem methodum — ad definienda elementa « realia » problematis.

b. Nova interpretatio unitatis imaginariae et numeri « complexi ».

Cum dentur condiciones algebricae quibus obtemperare nequeant numeri « reales », quaeritur num extendenda sit notio numerorum ; ipsae autem variae res, quae numerari possunt, suggerunt et postulant talem extensionem.

Numeri « reales » (« rationales » et « irrationales ») possunt graphice repraesentari per puncta unius rectae ; dantur autem in natura entia (entia « vectorialia »), quae aestimanda sunt non solum pro sua maiori aut minori magnitudine, sed etiam pro sua varia directione ; haec vero nota nequit exprimi per solos numeros reales ordinatos iuxta unam rectam.

Iure igitur considerantur numeri magis « complexi », quorum repraesentatio graphica extendatur ad integrum planum (fig. 13) : distantia ϱ puncti P plani ab origine O denotet ma-



gnitudinem cuiusdam vectoris ; angulus vero θ referat eius directionem.

Consideretur nominatim vector $+1$, qui rotetur circa O; si bis ei applicatur rotatio per quadrantem, vector $+1$ vertitur in vectorem -1; potest igitur talis operatio intelligi ut adiectio factoris imaginarii i; qui factor, si bis adicitur (i^2), vertit $+1$ in -1; scilicet:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}$$

Quare « numeri imaginarii » dicendi sunt dispositi — in nostra repraesentatione graphica — iuxta directionem orthogonam axi numerorum « realium ». Per varia autem puncta P plani denotantur « numeri complexi », quibus competunt binae partes componentes: altera « realis » (x), disposita iuxta axem horizontalem, altera « imaginaria » (iy), disposita iuxta directionem orthogonam priori.

Segmentum $\varrho = \overline{OP}$ dicitur « modulus » numeri complexi, et angulus θ dicitur eius « argumentum » vel « anomalia ».

Inter coordinatas cartesianas x, y et modulum ϱ et argumentum θ stant sequentes relationes:

$$x = \varrho \cdot \cos\theta \qquad y = \varrho \cdot \sin\theta$$

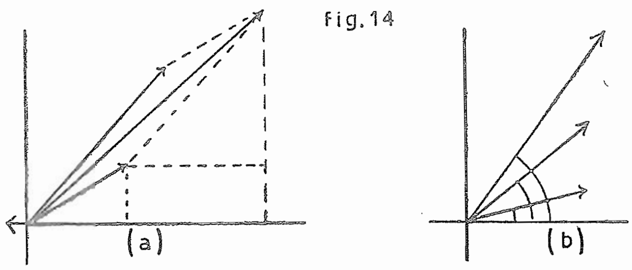
quare numerus complexus scribitur:

$$x + iy = \varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Operationes circa numeros complexos fiunt ut ceterae operationes algebricae (servatis conventionibus statutis quoad partes reales et partes imaginarias et servatis regulis de potentiis i^u).

Notentur nominatim quae sequuntur (fig. 14):

Fig. 14



1) Summa duorum numerorum complexorum est novus numerus complexus cuius pars realis est summa partium realium addendorum, et cuius pars imaginaria est summa duarum partium imaginariarum

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

2) Productus duorum numerorum complexorum est novus numerus complexus, cuius modulus est productus modulorum duorum factorum, et cuius argumentum est (cfr. formulas trigonometricas) :

$$\varrho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \cdot \varrho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) = \\ = \varrho_1\varrho_1 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

N.B. - Operationes algebricae circa coordinatas x, y duorum factorum ducunt ad parem expressionem.

$$[x_1 + iy_1] \cdot [x_2 + iy_2] = [x_1x_2 - y_1y_2] + i\,[x_1y_2 + x_2y_1] = \\ = \varrho_1\varrho_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i} \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

Congruenter cum conventionibus statutis, multiplicatio numeri realis a per unitatem inaginariam i infert rotationem per unum quadrantem :

$$(a + i \cdot 0) \cdot (0 + i \cdot 1) = 0 + i\,(a + 0) = 0 + i \cdot a = i \cdot a$$

3) Consequenter potentiae numerorum complexorum sunt :

$$(x + iy)^n = \varrho^n (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta)$$

et radices sunt :

$$\sqrt[n]{x + iy} = (x + iy)^{1/n} = \varrho^{1/n} (\cos\theta/n) + i \cdot \sin\theta/n)$$

distinguuntur scilicet tot radices n.simae quot unitates continentur in numero n. Quod dicendum est nominatim de radicibus unitatis quarum auxilio definiri possunt radices ceterorum numerorum.

Sequitur etiam aequationem gradus n.simi admittere n solutiones, quae possunt esse reales, complexae et mere imaginariae.

Nominatim aequationi secundi gradus competunt semper duo solutiones, quae possunt esse reales et distinctae ($b^2 > 4ac$), reales et coincidentes ($b^2 = 4ac$), et imaginariae coniugatae ($4ac > b^2$) [dicuntur coniugati ii numeri complexi, quorum partes reales sunt aequales, et quorum partes imaginariae differunt solo signo, altero positivo altero negativo.

c. Numeri complexi expressi per functiones exponentiales praeditas exponente imaginario.

Numeri complexi exprimuntur per cosinum et sinum argumenti θ ; simplices autem relationes (ut sequens tabella indicat) stant inter functiones circulares sinus et cosinus (quae definiuntur per ordinatas series potentiarum arcus x) et functionem exponentialem e^x $(e = 2{,}71828\ldots)$; scilicet :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \frac{x^6}{6\,!} + \frac{x^7}{7\,!} + \ldots$$

Quod si functioni exponentiali tribuitur exponens imaginarius ix, scribendum est :

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2\,!} - i\frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + i\frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^6}{6\,!} - i\frac{x^7}{7\,!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \ldots$$

$$+ ix - i\frac{x^3}{3\,!} + i\frac{x^5}{5\,!} - i\frac{x^7}{7\,!} + \ldots$$

quae formula, comparata cum praecedentibus, dat :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Quare tandem numeri complexi exprimuntur per functionem exponentialem :

$$\varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \varrho\cdot e^{i\theta}$$

$$\varrho\,(\cos\theta - i\sin\theta) = \varrho\cdot e^{-i\theta}$$

d. Entia physica expressa per numeros complexos.

Numeri complexi idonei sunt ad referendas magnitudines vectoriales ; plura autem entia physica gaudent hoc charactere ; quare numeri complexi (et numeri imaginarii in eis insiti) adhibentur etiam ad describenda entia physica et eorum veras proprietates.

Nominatim electrotecnica adhibet numeros complexos ad repraesentandas et computandas varias magnitudines electricas, quae variantur lege sinusoidali ; inter quas recensendae sunt imprimis vires electromotrices oscillantes.

Generalis formula exprimens has magnitudines est :

$$a = A \sin \omega \cdot t$$

A denotat amplitudinem maximam magnitudinis oscillantis ; ω denotat velocitatem (angularem) qua variatur — per tempus t — angulus θ functionis sinusoidalis.

Operationes vero circa expressiones trigonometricas laboriosae fiunt ; quare ipsae magnitudines exprimuntur potius per numeros complexos. Descriptio enim magnitudinis, quae variatur lege sinusoidali, referri potest ad vectorem rotantem circa suam originem (amplitudo A oscillationis exprimitur per longitudinem vectoris — functio autem a exprimitur per proiectiones eiusdem vectoris supra definitos axes). Talis autem vector describi potest per numerum complexum, cuius modulus A manet invariatus, et cuius argumentum θ variatur per tempus t velocitate uniformi ; quare scribitur :

$$a = A\, e^{i\omega t} \; ; \qquad\qquad a = A\, e^{-i\omega t}$$

adhibito signo positivo aut negativo pro diverso motu rotatorio, dextrorso aut sinistrorso.

Circa tales expressiones exponentiales commode fiunt variae operationes ad solvenda probiemata.

Exponenda nobis non sunt haec problemata ; sufficiat notasse aptitudinem numerorum complexorum (includentium partem imaginariam) ad referenda entia physica et eorum proprietates.

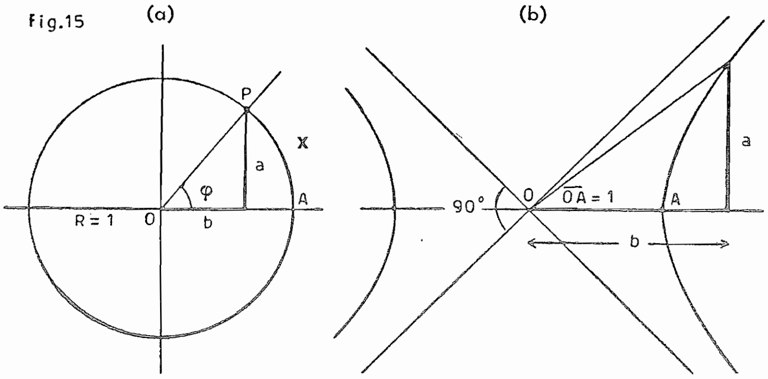
23. De functionibus hyperbolicis.

a. Definitiones analogae functionum circularium et functionum hyperbolicarum.

Nota est ratio qua functiones trigonometricae (nominatim sinus, cosinus, tangens : cfr. fig. 15 a) definiuntur auxilio circuli praediti radio unitario : ipsae functiones graphice exprimuntur per definita segmenta a, b quae diversa fiunt pro varia positione puncti P percurrentis circulum et determinantis varios angulos φ.

Analoga ratione definiuntur functiones hyperbolicae (nominatim sinus, cosinus, tangens ; cfr. fig. 15 b) si punctum P percurrit hyperbolem aequilateralem (cuius asymptoti efformant angulum rectum). Figura satis has functiones illustrat (NB. ut sinus et cosinus hyperbolici directe repraesententur per ipsa segmenta a et b opus est ut segmentum OA sit unius unitatis ; secus considerandae sunt proportiones a/OA, b/OA) :

Fig.15



$\sin x = a$	$\mathrm{Sh}\, x = a$	$(0 \to \infty)$
$\cos x = b$	$\mathrm{Ch}\, x = b$	$(1 \to \infty)$
$\mathrm{tg}\, x = a/b$	$\mathrm{Th}\, x = a/b$	$(0 \to 1)$

Si de functionibus circularibus agitur, variabilis x exprimit ipsum angulum φ vel (si $R = 1$) arcum quem substentat angulus φ; quaeritur autem elementum geometricum exprimens variabilem x cum agitur de functionibus hyperbolicis.

Res potest diversimode declarari; notetur sequens ratio quae analogiam confirmat inter functiones circulares et functiones hyperbolicas. In priori casu, arcus circularis x exprimit etiam proportionem inter duas areas: OPA (duplicandam) et R^2; quare, si $R = 1$, una eademque mensura competit arcui x et areae duplicatae OPA (ut probant formulae $2\pi R$ et πR^2 exprimentes longitudinem circuli et aream intra circulum); stat autem par relatio si de casu hyperbolico agitur: variabilis x exprimit proportionem inter aream (duplicandam) OPA et aream R^2; scilicet:

pro funct. circularibus	pro funct. hyperbolicis
$x = \dfrac{2S}{R^2} \qquad S = \text{area } OPA$	$x = \dfrac{2S}{R^2} \qquad S = \text{area } OPA$

b. Series algebricae et functiones exponentiales exprimentes Sh. et Ch.

Non minus quam functiones circulares sinus et cosinus, etiam Sh et Ch definiuntur per ordinatas et simplices series algebricas, quae obviam relationem manifestant cum seriebus definientibus functiones exponentiales; nam:

$$\mathrm{Ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\mathrm{Sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots$$

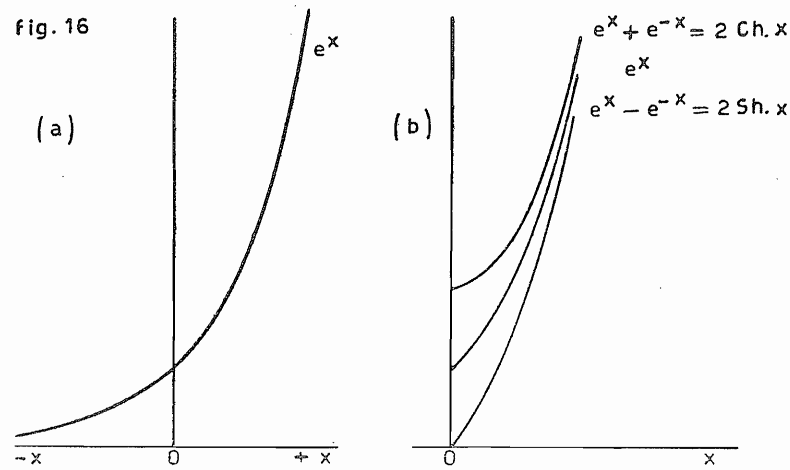
Colliguntur igitur sequentes binae relationes :

$$\begin{cases} \mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x = e^x \\ \mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\, x = e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \\ \mathrm{Sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{cases}$$

c. Comparatio graphica inter functiones e^{-x}, e^x Ch.x, Sh.x.

fig. 16



d. Relationes inter functiones hyperbolicas et circulares.

Series algebricae exprimentes functiones hyperbolicas Ch et Sh congruunt cum seriebus exprimentibus functiones circulares sinus et cosinus, si pro variabili x ponitur numerus imaginarius ix; obtinentur enim sequentes series (cfr. Append. I a, c) :

$$\mathrm{Ch}\, ix = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots = \cos x$$

$$\mathrm{Sh}\, ix = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - i\frac{x^7}{7!} \ldots = i \cdot \sin x$$

Stant propterea relationes :

$$\left\{\begin{aligned} \cos x &= \mathrm{Ch}\, ix \\ \sin x &= \frac{1}{i}\,\mathrm{Sh}\, ix \\ \mathrm{tg}\, x &= \frac{1}{i}\,\mathrm{Th}\, ix \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \cos ix &= \mathrm{Ch}\, x \\ \sin ix &= i\,\mathrm{Sh}\, x \\ \mathrm{tg}\, ix &= i\,\mathrm{Th}\, x \end{aligned}\right.$$

Notentur etiam relationes sequentes de quibus usus factus est (cfr. nn. 10, d ; 22, c) :

$$\left\{\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}\right. \quad \text{unde sequitur} \quad \left\{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \mathrm{Ch}\, ix \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{i}\,\mathrm{Sh} ix \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \cos\frac{a}{ik} &= \cos\frac{ia}{ki^2} & \sin\frac{a}{ik} &= \sin\frac{ia}{i^2k} \\ &= \cos - i\frac{a}{k} & &= \sin - i\frac{a}{k} \\ &= \cos i\frac{a}{k} & &= -\sin i\frac{a}{k} \\ &= \mathrm{Ch}\frac{a}{k} & &= -i\,\mathrm{Sh}\frac{a}{k} = \frac{1}{i}\,\mathrm{Sh}\frac{a}{k} \end{aligned}$$

24. De geometria analytica.

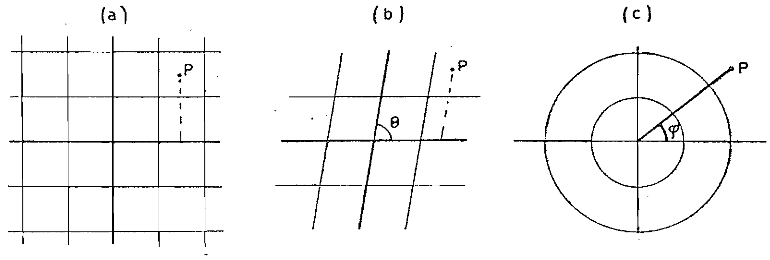
a. Systemata coordinatarum in plano.

Geometria analytica describit entia geometrica formulis mathematicis : proprietates scilicet figurarum exhibentur ut totidem relationes mathematicae inter eorum puncta et inter varia elementa quae in ipsis figuris distingui possunt.

Fundamentum huius descriptionis stat in systemate coordinatarum cuius auxilio omnia et singula puncta entis geometrici definiuntur quibusdam numeris.

Consideretur in primis planum (euclideum). Ut notum est, « coordinatae cartesianae orthogonae » constituunt simplicissimum systema coordinatarum (fig. 17 a).

Fig. 17



Duo axes fundamentales x, y mutuo se secant iuxta angulum rectum in puncto O, quod assumitur ut origo omnium mensurarum : distantiae (positivae aut negativae) ab origine O supra axes x, y aestimantur iuxta seriem numerorum realium, ratione habita de mera extensione interposita inter O et varia puncta axium.

Per quodlibet punctum P plani transeunt duae definitae rectae (lineae coordinatae), orthogonae axibus x, y, secantes

hos axes in duobus punctis plane definitis per suas distantias ab O ; hae ipsae distantiae (x_a, y_a) assumuntur ad designandas dictas lineas coordinatas ($x = \text{const.}$; $y = \text{const.}$), et hi ipsi bini numeri (x, y), « ascissa et ordinata », assumuntur ut « coordinatae » puncti A.

Lineae coordinatae cartesianae constitui etiam possunt rectis quae mutuo se secant iuxta angulum diversum ab angulo recto (fig. 17 b) (« coordinatae cartesianae obliquae ») ; pari vero ratione definiuntur etiam in hoc casu et lineae coordinatae et binae coordinatae punctorum plani.

Aliae coordinatae communiter adhibitae eae sunt quae dicuntur « coordinatae polares » (fig. 17 c) : ab origine O procedunt radii (recti) in omnes directiones ; directio autem φ (angulo computato inde a definito axe) et distantia ϱ ab origine constituunt binas coordinatas definientes varia puncta plani. Lineae coordinatae sunt : a) systema radiorum egredientium ab O (unusquisque radius definitur per angulum quem efformat cum axe fundamentali : $\varphi = \text{const.}$) ; b) systema circulorum, quorum centrum commune est origo O (unusquisque circulus definitur suo radio : $\varrho = \text{const.}$).

Generaliora systemata linearum coordinatarum constituuntur duobus systematibus linearum curvarum mutuo se secantibus ita ut per quodlibet punctum P plani transeat una definita linea uniuscuiusque systematis (cfr. n. 13) : unaquaeque linea coordinata definitur suo proprio numero ; et bini numeri linearum coordinatarum transeuntium per varia puncta P plani constituunt coordinatas ipsorum punctorum.

Varia systemata coordinatarum, quae statui possunt supra idem ens geometricum, referuntur ad invicem definitis relationibus analyticis ; ex. gr. coordinatae cartesianae orthogonae et coordinatae polares plani exhibent sequentes mutuas relationes :

$$x = \varrho \cdot \cos\varphi \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2$$
$$y = \varrho \cdot \sin\varphi \qquad \varphi = \text{arctg.}\, y/x$$

Auxilio autem talium relationum (seu transformationum coordinatarum) figura, quae iam descripta est respectu alteru-

trius systematis, obtinet suam novam descriptionem respectu alterius systematis.

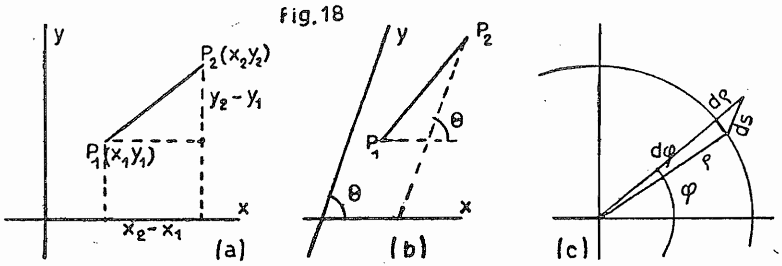
b. Distantia inter duo puncta.

Primum elementum geometricum definiendum per systema coordinatarum est distantia inter duo puncta.

Supposita proprietate euclidea plani, si descriptio refertur ad coordinatas cartesianas orthogonas, distantia D inter duo puncta $P_1 P_2$ obvie definitur per coordinatas ipsorum punctorum applicato theoremate pythagorico (fig. 18, a) :

$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

fig. 18



Quod si exprimendum est intervallum infinitesimum ds inter puncta quae in indefinitum fiunt proxima, scribendum est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Si adhibentur coordinatae cartesianae obliquae (fig. 18, b), applicato theoremate Carnot, scribendum est :

$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + 2 \cos \theta \, (x_2 - x_1) \, (y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2$$
$$ds^2 = dx^2 + 2 \cos \theta \cdot dx \cdot dy + dy^2$$

Adhibitis coordinatis polaribus (fig. 18, c), elementum lineare infinitesimum est :

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \, d\varphi^2$$

distantia autem finita inter duo puncta dissita colligi potest ex distantia iam definita coordinatis cartesianis si ipsi applicantur formulae transformantes coordinatas cartesianas in coordinatas polares ; scilicet :

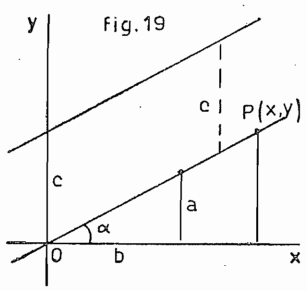
$$D^2 = (\varrho_2 \cos \theta_2 - \varrho_1 \cos \theta_1)^2 + (\varrho_2 \sin \theta_2 - \varrho_1 \sin \theta_1)^2$$

c. Descriptio analytica linearum.

1. Linea rectae (adhibitis coordinatis cartesianis orthogonis).

Consideretur in primis recta transiens per originem O : plene definitur si solum assignatur aliud eius punctum P $(y = a\ ;\ x = b)$ (fig. 19).

Binae coordinatae cuiusvis puncti rectae obtemperant sequenti condicioni :



(1) $$y : x = a : b$$

Puncta vero externa rectae non obtemperant eidem condicioni ; quare proportio (1) exprimit proprietatem quae competit omnibus et solis punctis rectae ; ipsa igitur proportio accipi potest ut descriptio analytica rectae ; quae scribi etiam potest :

$$a\,x = b\,y \quad ; \quad a\,x - b\,y = 0 \quad ; \quad y = \frac{a}{b}\,x \quad ; \quad \frac{a}{b} = \text{tg.}\,\alpha$$

Coëfficiens a/b exprimit inclinationem rectae respectu axis x.

Si consideratur recta non transiens per O, sed parallela priori (i. e. : retinens parem inclinationem a/b), omnes ordinatae y sortiuntur par incrementum c ; quare scribendum est :

$$y = \frac{a}{b}\,x + c \qquad \text{seu} \qquad ax - by + c = 0$$

Generalior igitur expressio algebrica definiens lineam rectam est:

(1) $$ax + by + c = 0$$

in qua expressione a, b, c sunt «parametra» constantia pro unaquaque definita recta; variantur vero (ita ut singula designare possint quemlibet numerum tum positivum tum negativum) pro varia inclinatione rectae et pro varia eius distantia ab O.

Notentur nominatim expressiones analyticae quae competunt lineis coordinatis cartesianis:

— axi y	$x = 0$	(variantibus ordinatis y — pro $x = 0$ — inter 0 et $\pm\infty$)
— rectis parall. axi y:	$x =$ const.	(i. e.: b $= 0$; quare y libere variatur inter 0 et $\pm\infty$)
— axi x	$y = 0$	(variante x inter 0 et $\pm\infty$)
— rectis parall. axi x:	$y =$ const.	(i. e.: $a = 0$, variante x inter 0 et $\pm\infty$)

2. Nonnulla exempla linearum curvarum.

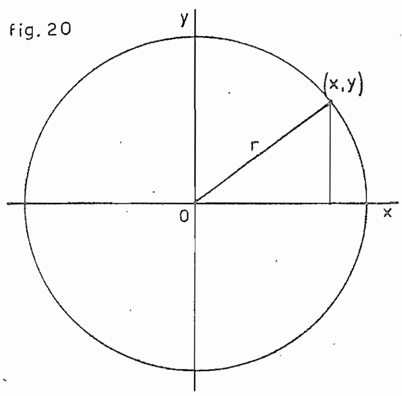
— *Circulus* (fig. 20).

Centrum circuli sit ipsa origo O coordinatarum; puncta circuli sunt ea omnia quorum distantia a centro aequant radium r; obtemperant propterea sequenti condicioni:

(II.) $x^2 + y^2 = r^2$ (coordinatae cartesianae orthog.)

$\varrho =$ const. (coordinatae polares)

Fig. 20



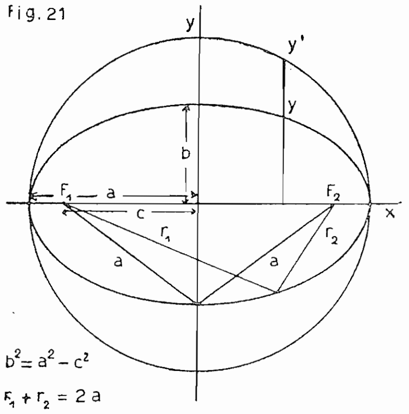
quod si centro competunt coordinatae $x_0\ y_0$, scribendum est:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$$

Aequatio (II.) potest etiam scribi:

(II'.) $$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

Fig. 21



— *Ellipsis* (fig. 21).

Ellipsis concipi potest ut deducta ex circulo, cuius distantiae ab uno definito diametro contrahantur iuxta unam communem proportionem ; quare aequatio describens ellipsim deducitur ab aequatione circuli ratione habita de hac proprietate.

Centrum ellipsis sit ipsa origo O axium cartesianorum ; dimensiones contractae sint orthogonae axi x (i. e.: axis maior ellipsis iacet supra axem x, et axis minor supra axem y).

Associetur ellipsi circulus e quo deducta est ; notentur $x'\,y'$ coordinatae punctorum circuli, et $x\,y$ coordinatae punctorum ellipsis ; sequentes autem relationes stant inter coordinatas punctorum correlativorum circuli et ellipsis :

$$(2) \qquad x' = x \; ; \qquad y' : y = a : b \qquad \text{seu} \qquad y' = \frac{a}{b} y$$

Coordinatae punctorum circuli obtemperant notae aequationi :

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

quare, ratione habita de relationibus (2), coordinatae punctorum ellipsis obtemperant sequenti aequationi (cfr. II'_o) :

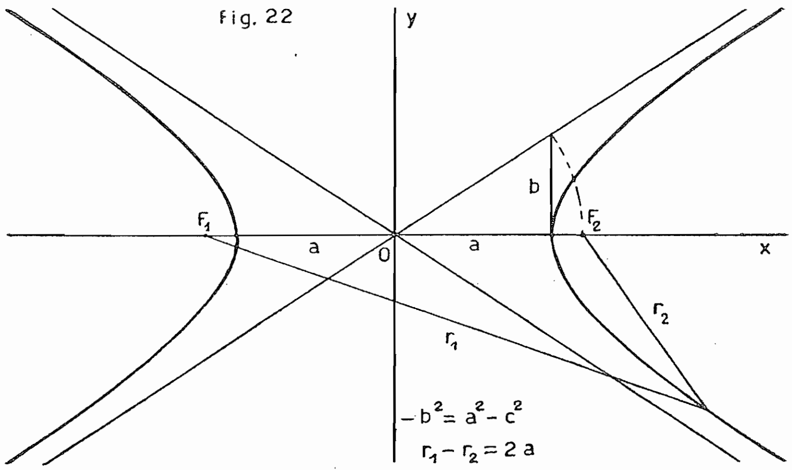
$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2$$

$$(\mathrm{II}_e) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— *Hyperboles* (fig. 22).

Aequatio describens hanc curvam deducitur (non minus quam aequatio circuli et ellipsis) ex eius proprietatibus ; brevitatis causa notamus tantum hyperbolem considerari posse velut ellipsim cuius axis minor factus sit imaginarius ib ; quare scribendum est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{II$_h$}$$



Haec linea evolvitur per duos distinctos ramos contentos inter duas rectas, quae denominantur « asymptoti » : hyperboles (quae in indefinitum protrahitur) magis ac magis accedit tamquam ad limitem ad asymptotos, numquam illos tangendo in punctis non infinite distantibus.

Hyperboles est « aequilatera » si $b = a$; describitur igitur sequenti aequatione (cfr. II$'_o$) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{II$'_h$}$$

— *Parabola* (fig. 23).

Haec linea admittit axem cuius respectu evolvitur sym-

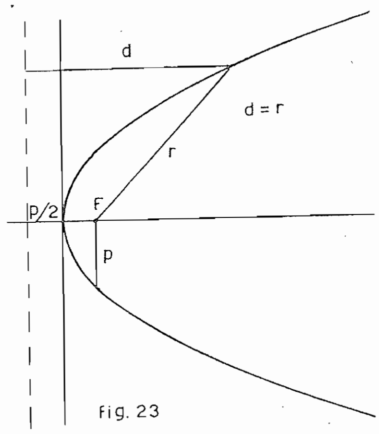


Fig. 23

metrice; congruat axis parabolae cum axe x; proprietas autem quae distinguit hanc curvam haec est: dum ordinatae y eius punctorum crescunt iuxta seriem naturalem numerorum, abscissae x crescunt rapidius: proportionem servando (iuxta certum coëfficientem) cum potentia secunda ordinatae y; quare aequatio parabolae scribitur:

$$(\mathrm{II}_p) \qquad y^2 = 2p \cdot x$$

Notandum.

Lineae curvae hucusque recensitae (quae omnes describuntur aequationibus secundi gradus) dicuntur « conicae », quia sunt tot sectiones superficiei conicae circularis: pro diversa enim inclinatione plani secantis respectu axis et directricis coni, sectio est circulus, ellipsis, parabola, hyperboles.

His curvis competunt non paucae proprietates quae describi possunt methodo propria geometriae analyticae; sed non est nobis immorandum in talibus descriptionibus (consulantur tractatus de geometria analytica).

Notanda potius nobis est ratio qua omnes dictae lineae (non exclusis lineis rectis) mutant suam positionem et evolutionem cum variantur parametra quae inseruntur in earum descriptione analytica: si ipsa parametra variantur modo continuo, colligitur infinita series linearum, quae modo continuo transfertur vel etiam deformatur; haec proprietas nobis illustrat rationem qua generatim constitui possunt systemata (continua) linearum coordinatarum (cfr. n. 13): unaquaeque linea coordinata potest suo proprio numero distingui, qui est ipsum parametrum particulare determinans ipsam lineam.

Sequentia notentur:

— *quoad rectas*: variato parametro c, recta transfertur

modo parallelo (hac ratione variantur lineae coordinatae in systemate cartesiano).

— *quoad ipsas rectas*: variato modo continuo parametro a/b seu tag α, recta rotatur modo continuo (hac ratione constituitur systema radiorum coordinatarum polarium).

— *quoad circulum*: variato modo continuo parametro r, obtinetur series continua circulorum concentricorum (sic constituitur systema circulorum coordinatarum polarium).

— *quoad ellipsim*: crescentibus axibus a, b (invariata servata eorum proportione) obtinetur series continua ellipsarum similium.

— *quoad hyperbolem* (consideretur hyperboles aequilatera): crescente modo continuo parametro a, obtinetur series infinita hyperbolarum, quae modo continuo transferuntur magis ac magis discedendo ab axymptotis (simul mutata earum curvatura.

— *quoad parabolam*: variante modo continuo parametro p, obtinetur series infinita parabolarum, comprehensa inter duos limites extremos, qui sunt axis y et axis x: parabola magis ac magis aperitur tendendo ad ipsum axem y cum parametrum p tendit ad ∞; ex contrario parabola magis ac magis contrahitur, tendendo ad axem x, cum parametrum p imminuitur et tendit ad 0.

3. Curvae algebricae ordinis superioris.

Si elevatur gradus functionis algebricae describentis lineam curvam, haec multifarie evolvitur: acquirere potest plures flexiones, necnon nodos et cuspides.

Nonnullae curvae huiusmodi classicae sunt: eas excogitaverunt geometri graeci ut, earum auxilio, solverent nonnulla problemata (ex. gr. de duplicatione cubi, de trisectione angulorum . . .) quae solvere non poterant unice describendo rectas et circulos. Expressiones algebricae harum curvarum colliguntur ex ipsis rationibus quibus construuntur. His expressionibus tribui potest forma parametrica, ita ut — variante uno parametro — aequatio determinet integram seriem curvarum, quae modo continuo transferuntur et deformantur.

Notitiis de his peculiaribus curvis praetermissis, notemus tantum curvam algebricam expressam per polinomium (completum aut non completum) n.simi gradus :

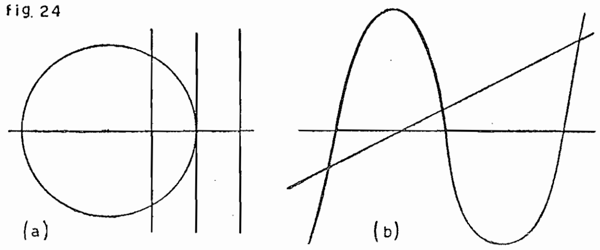
$$y = a\,x^n + b\,x^{n-'} + \ldots\ldots + p\,x + q$$

Talis curva multis in modis flecti potest : coëfficientes enim $a, b \ldots\ldots p, q$ (quorum numerus est $n + 1$) possunt ita definiri ut curva transeat per $n + 1$ puncta ad libitum statuta.

Gradus n functionis algebricae dicit numerum punctorum in quibus curva secatur a linea recta (quae puncta vero possunt etiam esse non realia, sed complexa aut simpliciter imaginaria).

Si agitur de curva secundi ordinis, linea recta eam secat in duobus punctis ; ita recta secat circulum in duobus punctis, quae tamen possunt esse realia et distincta, realia et coincidentia, et imaginaria coniugata (cfr. Append. I, n. 22, a ; b). Considerentur, ex. gr., intersectiones circuli $x^2 + y^2 = r^2$ cum recta $x = a$ (fig. 24, a) ; colligimus $y^2 = r^2 - a^2$, $y = r^2 - a^2$. prout a r, duo puncta intersectionis sunt realia et distincta, realia coincidentia, imaginaria coniugata.

fig. 24



Si agitur de curva tertii ordinis :

$$y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

linea recta illam secat in tribus punctis (fig. 24, b).

Variantibus in expressione algebrica huius curvae parametris $a, b, c, d,$ flexiones curvae diversimode evolvuntur eextenduntur.

Haec sufficiat notasse ut intelligatur quam varias curvas expressiones algebricae valeant definire.

4. Curvae « transcendentes ».

Expressiones analyticae definientes lineas curvas non necessario sunt expressiones algebricae : etiam functiones quae dicuntur « transcendentes » possunt graphice repraesentari per lineas curvas. Tales sunt omnes functiones trigonometricae, et functiones variae continentes functiones trigonometricas ; item functio logarithmica ($x = \log y$) et functio reciproca exponentialis $y = a^x$. Notae autem sunt repraesentationes graphicae harum functionum (cfr. tractatus de trigonometria ; quoad functionem exponentialem v. n. 23, c).

d. Lineae coordinatae et elementum lineare supra sphaeram.

Aptissimum systema linearum coordinatarum supra sphaeram constituitur per eius meridianos et parallelos. Hae lineae, quae mutuo se secant iuxta angulum rectum, constituunt — supra sphaeram — systema coordinatarum omnino analogum systemati coordinatarum cartesianarum supra planum : linea aequatorialis respondet axi x plani ; quilibet meridianus respondere potest axi y (fig. 25).

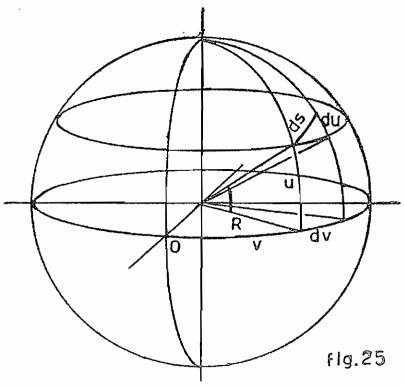


fig.25

Etiam binae coordinatae, definientes varia puncta P sphaerae, statui possunt modo analogo ac supra planum: considerentur scilicet bini arcus u, v, quos parallelus et meridianus transeuntes per P secant supra meridianum fundamentalem ($v = O$) et supra lineam aequatorialem ($u = O$).

Geometriae vero sphaerae et plani non sunt aequales propter diversam curvaturam duarum superficierum ; quare

elementum lineare supra sphaeram necessario est alterius typi ac elementum lineare plani (euclidei) : nullum scilicet systema coordinatarum statui potest supra sphaeram, cuius respectu obtineatur elementum lineare typi euclidei $ds^2 = du^2 + dv^2$.

Discrimen inter duas superficies ad hoc redit : dum supra planum lineae coordinatae orthogonae axi x sunt tot geodeticae aequidistantes inter se, supra sphaeram meridiani sunt lineae geodeticae non aequidistantes. Quare, si elementum lineare sphaerae refertur ad arcus u, v quos determinant paralleli et meridiani, ratio habenda est de distantia varia (v') inter duos definitos meridianos : haec distantia — maxima supra aequatorem (v) — imminuitur dum elevatur latitudo (u/R) paralleli ; stat autem sequens proportio (cfr. fig. 25):

$$dv : dv' = R : R \cos \frac{u}{R}$$

quare colligimus :

$$dv' = \cos \frac{u}{R} \, dv$$

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R} \cdot dv^2$$

Si eliguntur ut coordinatae non iam arcus u, v supra superficiem sphaericam, sed latitudo θ et longitudo φ (i. e. : anguli habentes verticem in centro sphaerae et substentantes dictos arcus u, v), stant sequentes relationes :

$$u = R \cdot \theta \qquad v = R \cdot \varphi$$
$$du = R \cdot d\theta \qquad dv = R \cdot d\varphi$$

quare colligimus :

$$ds^2 = R^2 \cdot d\theta + R^2 \cdot \cos^2 \theta \, d\varphi^2$$

quod si angulus θ designat non iam latitudinem, sed colatitudinem scribendum est :

$$ds^2 = R^2 \cdot d\theta^2 + R^2 \cdot \sin^2 \theta \, d\varphi^2$$

e. Coordinatae in spatio tridimensionali.

Geometria analytica spatii tridimensionalis late describet varias superficies (plana et superficies curvas) quae evolvuntur per spatium et earum proprietates. Nonnisi pauca vero notamus, quorum notitia adhibita est in nostra tractatione.

Adhibitis coordinatis cartesianis orthogonis $x, y, z,$ distantia inter duo puncta (bis applicato theoremate pythagorico) manifesto exprimitur sequenti formula:

$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

elemento autem lineari (exprimenti distantiam infinitesimam inter duo puncta infinite proxima) competit sequens forma:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dx^2$$

Puncta superficiei sphaericae (cuius centrum sit origo O coordinatarum) obtemperant, suis coordinatis, sequenti aequationi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Descriptio spatii tridimensionalis referri potest (ut mos est in astronomia) ad coordinatas polares, quae sunt:

ϱ : distantia puncti a definita origine;
θ : colatitudo puncti (definita respectu cuiusdam plani aequatorialis)
φ : longitudo puncti (aestimata respectu cuiusdam definiti meridiani)

Patet analogia harum coordinatarum cum iis quae iam positae sunt supra sphaeram: addenda tantum est tertia dimensio ϱ, quae iam variatur pro varia distantia punctorum spatii ab origine O; immediate igitur colligimus elementum lineare (cfr. n. 36):

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\theta^2 + \varrho^2 \cdot \sin^2 \theta \, d\varphi^2$$

PARS II

De spatiis non euclideis repraesentatis in spatio euclideo

Caput I

DIGRESSIONES CIRCA CHARTAS GEOGRAPHICAS

25. Repraesentationes spatiorum non euclideorum velut per chartas geographicas.

Proprietates characteristicae cuiusvis spatii non euclidei possunt graphice exhiberi in ipso spatio euclideo ea ratione qua proprietates metricae globi terrestris exprimuntur per chartas geographicas.

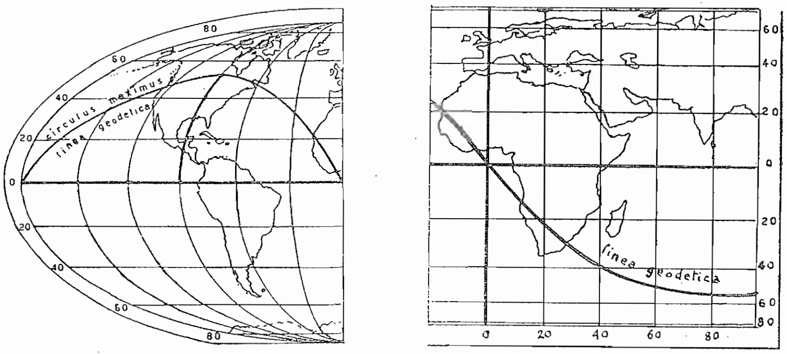
Si repraesentanda est superficies globi terrestris non requiruntur nisi chartae bidimensionales ; similiter plana non euclidea (hyperbolicum et ellipticum) repraesentantur in plano euclideo ; si vero exprimendae sunt proprietates totius spatii non euclidei adhibendum est spatium tridimensionale.

Tales repraesentationes exhibent omnes proprietates, tum metricas tum topologicas, spatiorum non euclideorum ; his proprietatibus perspectis, iudicare poterimus de earum interna congruentia et de condicionibus sub quibus dari possunt spatia non euclidea.

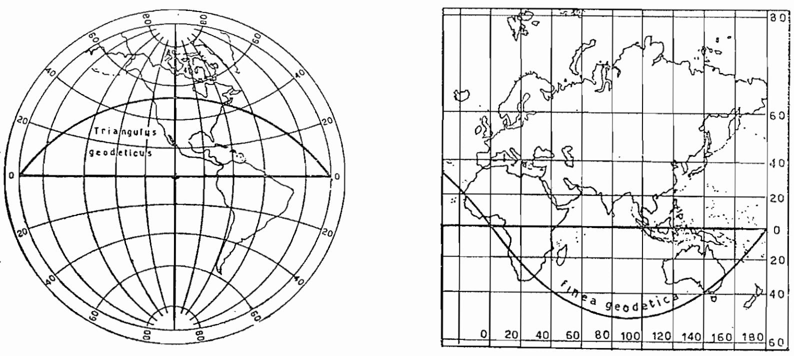
Iure aggredimur has investigationes de spatiis non euclideis initium ducendo ex spatio euclideo : ut enim iam declaratum est (cfr. n. 12 b), problema de spatiis non euclideis non excludit spatium euclideum ; immo ipsae solae hypotheses non euclideae denuo ducunt ad systema euclideum ut ad casum particularem, cuius interna congruentia iam extra dubium manet.

Repraesentationes spatiorum non euclideorum in spatio euclideo confici possunt non obstantibus eorum diversis curvaturis, sicut curvatura superficiei terrestris non obstat quominus conficiantur chartae geographicae planae ; necessario vero nostrae repraesentationes deformant quadam ratione extensiones spatii

Proiectiones «aequivalentes»: a) Mollweide - b) Lambert



Proiectiones «conformes»: a) stereographica - b) Mercatore



Proiectiones «azimutales»: a) circa Sackville - b) circa Madrid

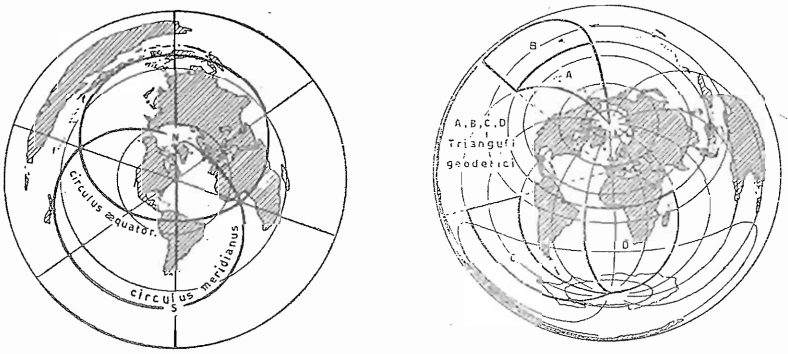


Fig. 26

non euclidei : omnimoda enim isometria postulat parem curvaturam.

Manifesto illustrant hanc condicionem ipsa exempla chartarum geographicarum, quibus superficies praedita curvatura positiva repraesentatur supra planum praeditum curvatura nulla.

26. Varii typi chartarum geographicarum et earum communis nota.

Omnes chartae geographicae — quavis methodo elaboratae — necessario deformant lineamenta propria globi terrestris quatenus aut alterant proportiones inter extensiones variarum regionum aut modificant earum formam ; quae condicio tamen non impedit quominus nonnulla elementa sine deformatione reproducantur ; pro variis autem scopis ad quos chartae inservire debent, alia et alia elementa eliguntur quae fideliter repraesententur (fig. 26).

Dantur chartae* (praeditae varia forma : rectangulari, ovoidali ...) quae invariatas servant proportiones inter areas regionum : quae *chartae* — « *aequipollentes* » denominatae — quam maxime idoneae sunt ut comparationes instituantur inter plura data earundem regionum (ex. gr. : densitates populationis, intensitates productionis agricolae aut industrialis ...).

Aliae *chartae* — « *isogonae* » *vel* « *conformes* » denominatae — invariatos servant angulos quos efformant supra superficiem terrae quaevis binae directiones egredientes e quolibet eius puncto.

Hic typus repraesentationis plurimum facit ad rem nostram : varii enim typi geometriarum postulant diversas proprietates pro angulis triangulorum ; quare, si anguli sine deformatione reproducuntur, ipsae chartae directe manifestant characterem geometriae.

---

* Scientia chartographica distinguit 15 generales rationes repraesentandi globum terrestrem ; ad hanc artem exacte declarandam, notandae prius essent regulae quibus conficitur sphaera idealis, quae vicem gerit geoidis et quae proprie repraesentatur ; sed ad nostrum finem omnes hae minutae notitiae non requiruntur, et nonnisi pauca indicamus.

Aliae chartae — *chartae « azimutales »* circa determinatum punctum O globi — sine deformatione reproducunt distantias et directiones (azimut) ceterorum punctorum globi respectu puncti O. Utiles sunt hae chartae ut radiotelecomunicationes aptentur variis directionibus et distantiis.

Notissima est *charta — conformis — a Mercatore* confecta, utillima ad navigationem dirigendam : agitur de proiectione cylindrica superficiei terrestris : singula scilicet puncta globi proiciuntur e centro ipsius globi in superficiem cylindricam, quae adhaereat globo iuxta eius lineam aequatorialem ; qua methodo meridiani vertuntur in tot lineas rectas, parallelas inter se et orthogonas lineae aequatoriali ; paralleli autem vertuntur in tot segmenta recta parallela aequatori : manent igitur lineae aequidistantes. In hac repraesentatione deformantur areae : variae regiones globi magis ac magis dilatantur quo magis recedunt ab aequatore et appropinquant polum. Haec proiectio, utpote conformis, invariatum relinquit angulum constantem quem linea loxodromica itineris maritimi efformat cum meridianis ; cum autem meridiani repraesententur per rectas parallelas, concludimus lineas loxodromicas repraesentari per tot segmenta recta inter extrema navigationis.

Elementa, quae sine deformatione repraesentanda sunt, nequeunt ad arbitrium et sine condicionibus eligi ; nominatim nequeunt dari chartae quae sint simul « isogonae » et « aequipollentes », et etiam vertant triangulos geodeticos terrestres in triangulos rectilineos ipsius chartae ; secus pares essent — tum supra superficiem terrestrem tum supra chartam — proportiones inter excessus geodeticos et areas triangulorum et consequenter curvatura terrae (quae his proportionibus exprimitur) nulla dicenda esset, non minus quam curvatura propria chartae planae.

Sicut chartae geographicae repraesentant in plano euclideo superficiem terrestrem, ita plana non euclidea (curva) *repraesentari possunt in plano euclideo. Ad nostrum scopum speciatim utiles erunt repraesentationes « conformes », seu « isogonae » :* ipsae enim reproducunt sine deformatione illos angulos figurarum — et in primis triangulorum geodeticorum — qui

immediate renuntiant naturam euclideam aut non euclideam geometriae, simul illustrando nonnullas proprietates.

Ut agnoscamus tales repraesentationes planas revera deformare extensiones entis geometrici repraesentati, praesto sunt argumenta manifesta, neque requiruntur ullae minutae mensurae et comparationes ; contingunt enim (non minus quam si de chartis geographicis agitur) condiciones sequentes :

— *puncta inextensa repraesentantur per extensiones finitas, et aliquando etiam infinitas* (sicut poli terrae in proiectione cylindrica, vel antipodes in proiectione polari) ;

— *extensiones finitae repraesentantur per elementa infinitesima, et etiam infinita* (sicut meridiani terrestres repraesentati, in proiectione cylindrica, per rectas infinitas ; item regiones prope polos in eadem proiectione) ;

— *extensiones pares repraesentantur per extensiones continuo varias* inter infinitesima et finita necnon infinita (similiter, in proiectione cylindrica, si rotatur positio cylindri ita ut eius contactus cum superficie sphaerica transvehatur ab aequatore usque ad polum ; item, in proiectionibus polaribus, imago unius eiusdemque regionis diversimode dilatatur et contrahitur pro diversa positione poli proiectionis) ;

— *extensiones diversae repraesentantur per extensiones pares* (sicut in proiectione cylindrica extensiones variae parallelorum inter duos definitos meridianos repraesentantur per segmenta recta aequalia).

Manifesto igitur extensiones repraesentatae dicendae sunt deformatae sicut nequeunt dici unum idemque :

— inextensa, extensa, et infinita in extensione ;

— finitum et infinitesimum in extensione ;

— extensiones pares et extensiones continuo variae inter infinitesima, finita et infinita.

27. Elementum lineare ad aestimandas extensiones repraesentatas supra chartas geographicas.

Si aestimanda est distantia inter duo puncta chartae geographicae requiritur apta regula metrica : non enim quaeritur dis-

tantia supra ipsam chartam, sed ea qua separantur supra superficiem terrestrem ea puncta, quorum imago consideratur supra chartam.

Ad hunc finem, ut notissimum est, *distantiae directe mensuratae supra chartam multiplicandae sunt iuxta eam ipsam rationem qua charta reducit veras distantias geographicas* ; quae ratio (« schala » denominata) invariata permanet usquedum charta uniformiter reducit omnes partes regionis repraesentatae ; qui casus non contingit (et quidem solo modo inexacto) nisi repraesententur regiones valde limitatae ; quod si repraesentatio extenditur ad totam terram (vel etiam ad eius regionem satis amplam), tunc charta notabiliter deformat lineamenta globi, reducendo extensiones variarum regionum iuxta rationes diversas ; requiritur propterea regula metrica continuo varia, quae pro singulis punctis chartae definiat propriam « schalam ». Tales regulae metricae diversae sunt pro variis typis chartarum.

Rem illustremus exemplo proiectionis cylindricae sphaerae supra planum : meridiani et paralleli (prout in plano repraesentantur) constituant lineas coordinatas ($x =$ const. ; $y =$ const.), quarum respectu elementum lineare (ad aestimandas distantias supra ipsam chartam) est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Sed nostra non interest longitudo elementi linearis supra chartam, sed longitudo elementi homologi supra sphaeram ; scribendum igitur est novum elementum lineare ds_σ quod referat ipsum elementum lineare sphaerae. Simplicitatis causa, consideremus directe non iam superficiem terrestrem, sed sphaeram parvae dimensionis, cuius linea aequatorialis aequet — sua longitudine — segmentum rectum aequatoriale chartae (fig. 27, a).

Elementum lineare supra sphaeram est (cfr. n. 24, d) :

$$ds_\sigma^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R}\, dv^2 \qquad (2\pi R = \text{segmentum aequatoriale chartae})$$

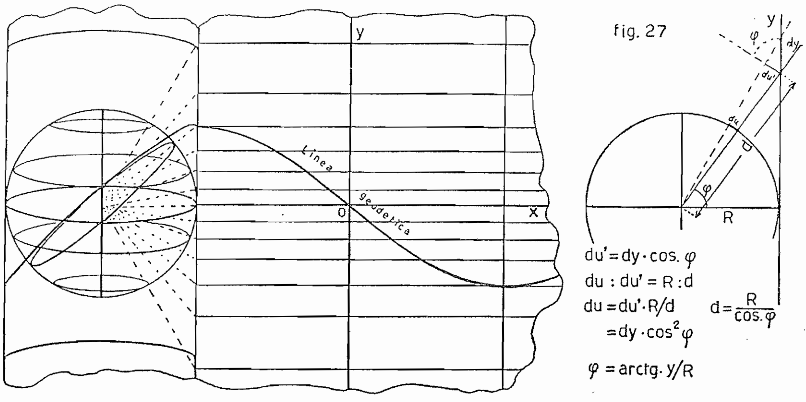


fig. 27

ut igitur aestimentur extensiones sphaerae, pro intervallis infinitesimis chartae planae, quae sunt :

$$dy \text{ (iuxta meridianos)} \qquad \text{et} \quad dx \text{ (iuxta parallelos)}$$

ponendae sunt mensurae segmentorum homologorum sphaerae :

$$du \text{ (supra meridianos)} \qquad \text{et} \quad \cos\frac{u}{R}\, dv \text{ (supra parallelos)}$$

Iamvero, ut desumitur ex figura 27 b*, segmentum dy reducitur ad homologum segmentum du si bis multiplicatur per $\cos\varphi$ ($\varphi = \text{artg}\, y/R$) ; stat dein aequalitas $dv = dx$; quare *ex ipsis coordinatis* x, y *chartae planae colligimus elementum lineare referens extensiones sphaerae,* si adhibemus formulam :

$$ds^2 = \cos^2\!\varphi \cdot dx^2 + \cos^4\!\varphi \cdot dy^2 \qquad (\varphi = \text{artg}\, y/R)$$

Quae regula metrica potest etiam ita declarari : ut ex chartis geographicis colligantur mensurae propriae superficiei terrestris, opus est ut intervalla linearia chartae aestimentur unitatibus mensurae non iam rigidis, sed elasticis, quae — pro variis punc-

* Proiectiones cylindricae superficiei terrestris repraesentant variis regulis (pro diverso scopo chartae) latitudines (variante igitur distantia inter quemque determinatum parallelum et aequatorem). Simplicitatis causa elegimus typum proiectionis, qui reapse non adhibetur si conficiendae sunt chartae geographicae.

tis et directionibus chartae — dilatentur aut contrahantur ea ipsa ratione qua proiectio deformat segmenta sphaerae cum illa transfert supra chartam planam. Etenim : si una eademque ratione deformantur et extensio mensuranda et unitas mensurae, sine variatione colliguntur eaedem mensurae quae competunt extensioni non deformatae.

Si de proiectione cylindrica agitur, segmenta sphaerae disposita iuxta meridianos magis dilatantur (pro pari latitudine) quam segmenta disposita iuxta parallelos : duo autem coëfficientes dilatationis sunt $1/\cos^2\varphi$ et $1/\cos\varphi$. Si igitur iuxta eosdem coëfficientes dilatantur etiam unitates mensurae ad aestimanda segmenta dy et dx, obtinentur mensurae imminutae iuxta coëfficientes reciprocos $\cos\varphi \cdot dx$ et $\cos^2\varphi \cdot dy$; quae mensurae (minores quam dx, dy) exacte referunt extensiones segmentorum homologorum supra sphaeram.

Tales regulae metricae, sicut referunt extensiones proprias superficiei sphaericae et non chartae planae, ita etiam exprimunt (per coëfficientes E, F, G elementi linearis) *curvaturam positivam sphaerae et non curvaturam nullam plani. Quare charta plana, per has peculiares metricas, velut induit curvaturam non propriam.*

28. Geometria intrinseca superficierum et chartae geographicae.

Quae affirmata sunt in praecedenti paragrapho nullatenus contradicunt propositionibus geometriae gaussianae, quae exhibent curvaturam ut proprietatem intrinsecam superficierum, quae nulli mutationi obnoxia est, etiamsi varientur expressiones elementi linearis.

Geometria enim gaussiana supponit omnia elementa linearia superficiei — quantumvis relata ad diversas coordinatas — constanter exprimere extensiones proprias superficiei ; quod si in variis expressionibus elementi linearis obtinentur diversae functiones $E, F, G,$ hoc unice adscribendum est variatis systematibus coordinatarum. Si vero agitur de chartis geographicis et de earum peculiaribus regulis metricis, mero artificio alterantur functiones E, F, G elementi linearis plani, quamvis

invariata serventur systemata coordinatarum (ex. gr. coordinatae cartesianae x, y in proiectione cylindrica) ; qua alteratione elementi linearis, iam non exprimuntur extensiones propriae plani.

Diversae igitur condiciones et proprietates affirmandae sunt in duobus casibus :

a) Ad geometriam gaussianam quod attinet :

Proprietates intrinsecae superficierum (nominatim character invarians curvaturae) supponunt mensuras deductas ex variis elementis linearibus constanter referre easdem extensiones proprias superficierum.

Qua de causa, isometria duarum superficierum dicit etiam ipsas superficies gaudere paribus extensionibus et propterea posse mutuo applicari sine deformatione earundem extensionum.

b) Ad chartas geographicas quod attinet :

Peculiaria elementa linearia, quae applicantur chartis geographicis, non dant extensiones proprias chartae planae, sed alterius superficiei curvae ; quare mensurae quae colliguntur, sicut referunt extensiones alienas, ita etiam exprimunt curvaturam alienam.

Non obstantibus vero diversis extensionibus et curvaturis chartae planae et superficiei sphaericae, haec potest quodámmodo applicari plano et in ipso repraesentari quia repraesentatio deformat extensiones. Adhibito autem apto elemento lineari, possunt etiam directe legi supra planum extensiones propriae superficiei curvae ; sed hoc non sufficit ut duae superficies dicantur isometricae : nonnisi artificio enim tributum est plano elementum lineare non proprium.

Licet etiam — ex conventione — instituere supra planum peculiarem regulam metricam, et adhibere (ad aestimandas extensiones ipsius plani) idem elementum lineare, iam definitum ad legendas supra chartas planas extensiones proprias superficiei sphaericae ; quo in casu, extensiones plani mensurantur unitatibus non rigidis, quae diversimode deformantur (cfr. n. 27) ; quare mensurae quae colliguntur, etsi quodammodo referunt extensiones plani, illas tamen non sine defor-

matione exprimunt: exhibent enim ut inextensa, aut finita aut paria, quae non sunt talia in sua extensione (cfr. n. 26).

29. Repraesentatio plani euclidei supra sphaeram.

Sicut superficies curva nequit repraesentari supra planum (euclideum) quin deformentur eius extensiones, ita spatia non euclidea (curva) nequeunt repraesentari in spatio euclideo (plano) sine deformatione suarum extensionum. Quae necessaria deformatio vero intelligenda non est tamquam condicio cui obnoxiae sunt sola spatia non euclidea; sed *pari iure stat etiam condicio reciproca: spatium euclideum nequit repraesentari in*

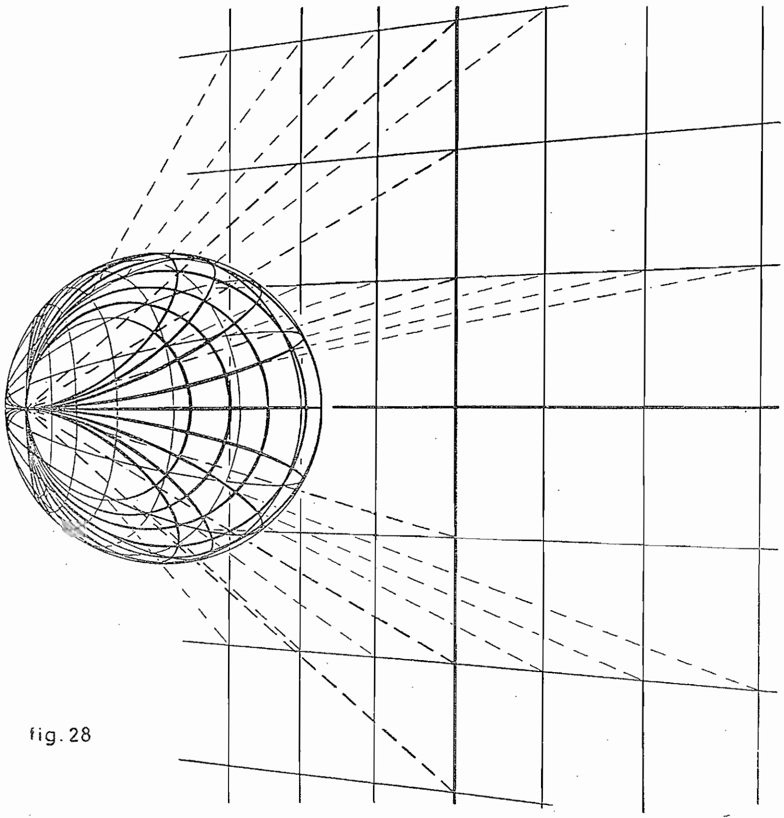


fig. 28

spatio non euclideo quin alterentur eius extensiones. Necessitas igitur talium deformationum ponenda est unice in curvaturis diversis duorum entium geometricorum, et non in peculiaribus proprietatibus metricis alterutrius spatii.

Res utiliter illustratur exemplo analogo chartis geographicis : si chartae geographicae repraesentant superficiem sphaericam supra planum, potest vicissim ipsum planum (euclideum) repraesentari supra sphaeram ; quo in casu deformantur extensiones plani.

Ex. gr. : eadem proiectio stereographica, qua tota superficies sphaerica proicitur (e quodam polo proiectionis posito supra ipsam sphaeram) in superficiem planam, potest inverso ordine considerari ut proiectio plani supra superficiem sphaericam ; et sic planum repraesentatur supra sphaeram.

Figura 28 hanc repraesentationem illustrat : tota extensio infinita plani euclidei colligitur supra superficiem finitam sphaerae ; omnia puncta infinite distantia plani colliguntur in unum punctum O inextensum, quod est ipse polus proiectionis. Quaevis linea recta plani vertitur in circulum clausum transeuntem per eundem polum O.

Duo systemata rectarum plani, orthogona inter se, mutantur in duo systemata circulorum sphaerae, qui etiam mutuo se secant iuxta angulum rectum (repraesentatio est conformis). Duae rectae parallelae plani mutantur in duos circulos qui transeunt per O iuxta unam eandemque directionem (quae condicio refert proprietatem euclideam de unica parallela).

Manifesta est ratio qua extensiones plani (quae in infinitum se evolvunt) infinite contrahantur ut ex integro colligantur supra superficiem finitam sphaerae. Quod si supra sphaeram adhibentur tales unitates mensurae, quae pari ratione contrahantur, leguntur supra ipsam sphaeram eaedem proprietates metricae plani euclidei. Qua regula metrica adhibita, sphaera et exprimit extensiones proprias plani euclidei et velut induit curvaturam nullam.

Haec repraesentatio supra sphaeram superficiei praeditae curvatura nulla non semel dein nobis consideranda erit.

Caput II

REPRAESENTATIONES BIDIMENSIONALES PLANORUM NON EUCLIDEORUM IN PLANO EUCLIDEO

A. Repraesentationes plani elliptici

30. Repraesentatio conformis plani elliptici.

Geometria elliptica congruit cum geometria sphaerae ; quare planum ellipticum repraesentari potest in plano euclideo pari ratione ac superficies sphaerica.

a. Proiectio stereographica sphaerae in planum.

Inter varias rationes proiciendi superficiem sphaericam in planum, aptissima est ad nostrum scopum ea *proiectio « stereographica » qua varia puncta sphaerae proiciuntur ex uno puncto P (polo proiectionis) in planum Π parallelum aequatori sphaerae (definito respectu eiusdem poli P)* (fig. 29, 30).

Haec proiectio (ut demonstratur et infra declarabitur) *est conformis :* imago enim sphaerae supra planum invariatos servat omnes angulos, quos supra sphaeram efformant quaevis segmenta geodetica egredientia e quovis puncto sphaerae. Notanda etiam est alia peculiaris proprietas huius proiectionis : omnes circuli sphaerae vertuntur in totidem circulos plani.

Linea aequatorialis sphaerae manifesto proicitur in circulum cuius radius aequat distantiam a inter polum P et planum Π. Centrum O huius circuli assumitur ut origo coordinatarum cartesianarum in plano Π ; ipsum centrum O est imago puncti P' antipodis poli P. Circuli maximi sphaerae qui transeunt per polum P vertuntur in lineas rectas plani Π transeuntes per O (quae lineae rectae censendae sunt circuli praediti radio infinito). Omnes denique *circuli maximi sphaerae* (seu lineae

geodeticae huius superficiei) *vertuntur in circulos qui secant imaginem aequatoris in binis punctis e diametro oppositis ;* quare ipsa imago aequatoris peculiare munus absolvit in hac repraesentatione sphaerae supra planum, et dicitur « circulus fundamentalis ». Notemus tandem regionem infinitesimam sphaerae circa polum P proici in distantiam in infinitum crescentem, et omnia puncta infinite distantia plani Π esse imaginem (infinite dilatatam) unius puncti P.

b. Elementum lineare.

Puncta plani Π referantur ad coordinatas cartesianas orthogonas, quarum origo sit O. Si mensurae supra planum referre debent non iam extensiones proprias ipsius plani, sed extensiones homologas sphaerae (quae etiam stant pro extensionibus plani elliptici), *opus est ut singula elementa dx, dy aestimentur unitatibus mensurae elasticis quae, in singulis punctis plani, dilatentur pari ratione ac homologa elementa linearia sphaerae* (cfr. n. 27) ; consequens est ut obtineantur eaedem mensurae ac supra sphaeram.

His criteriis adhibitis, elementum lineare applicandum plano acquirit sequentem formam.

$$ds^2 = 4\,a^2R^2\,\frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} \tag{I}$$

Manifesta fit ratio qua elementum sphaerae varie dilatantur per proiectionem sui in planum : proportio enim inter varia elementa ipsius plani $(\sqrt{dx^2 + dy^2})$ et elementum homologum ds sphaerae (cuius mensura reproducitur per formulam I) est :

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{ds} = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{2\,a\,R} \tag{I$_a$}$$

Quae proportio (exprimens ipsam rationem dilatationis elementorum linearium per proiectionem) fit minima $(a/2R)$ pro puncto O $(x = 0\,;\ y = 0)$; crescit quo altiores fiunt

coordinatae x, y, seu quo magis punctum plani Π distat ab origine O; quae condicio indicat symmetriam circularem proiectionis circa punctum O.

Apparet etiam character conformis proiectionis: considerentur omnia elementa linearia sphaerae egredientia (in omnem directionem) ex definito puncto P, et eorum elementa homologa supra planum Π egredientia e puncto P'; iamvero inter omnia haec bina elementa homologa stat una definita proportio, quam exprimit formula I_a; intra ambitus igitur infinitesimos circa P et P' stat definita similitudo; similitudo autem testatur characterem isogonum proiectionis.

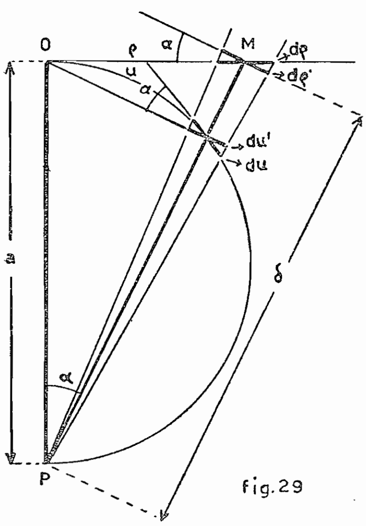


fig.29

Formula (I) facile demonstratur si notatur proportio quae stat inter bina elementa homologa sphaerae et plani (fig. 29).

Consideretur in primis elementum infinitesimum $d\varrho$ plani dispositum iuxta directionem collineantem cum origine O, et cuius punctum medium sit $M(x_0 y_0)$; eius elementum homologum supra sphaeram est du iacens supra meridianum. Dicatur δ distantia inter polum P et punctum $\mathrm{M}\,(x_0 y_0)$.

Considerentur, praeter elementa $d\varrho$ et du, alia duo elementa auxiliaria $d\varrho'$ et du', utraque orthogona segmento δ, secantia $d\varrho$ et du in eorum puncto medio, et contenta intra eosdem radios proicientes du in $d\varrho$; notemus angulos $d\varrho \cdot d\varrho'$ et $du \cdot du'$ aequare utrosque angulum MPO, et propterea esse anquales inter se.

Definienda est proportio $d\varrho/du$; stat autem aequalitas (propter pares angulos α):

$$\frac{d\varrho}{du} = \frac{d\varrho'}{du'}$$

notentur denique relationes:

$$\frac{d\varrho'}{du'} = \frac{\delta}{2 \cdot R \cdot \cos\alpha} = \frac{\delta}{2 \cdot R\, a/\delta} = \frac{\delta^2}{2 \cdot a \cdot R} \quad ; \; \delta^2 = x^2 + y^2 + a^2$$

ex quibus omnibus colligitur relatio I_a.

Hucusque vero relatio I_a comprobata est tantum pro peculiaribus directionibus $d\varrho$ (collineante cum O) et du (supra meridianum) ; sed statim conclusio extenditur ad quaevis alia bina elementa linearia homologa utcumque directa.

Consideretur enim circulus infinitesimus circa punctum M, et conus proiciens ipsum circulum ex P ; area homologa huius circuli plani supra sphaeram est et ipsa circularis : utraeque enim areae sunt sectiones eiusdem coni, efformantes pares angulos α cum axe coni.

Concludimus inter quaevis bina elementa homologa plani et sphaerae (utcumque directa) stare relationem I_a.

Stat igitur sine exceptione formula I. *

c. Proprietates metricae plani elliptici.

Pro regula metrica (I) *statuta supra planum Π, leguntur supra ipsum planum eaedem mensurae et relationes metricae ac supra sphaeram ; quae relationes denique reproducunt proprietates metricas plani elliptici. Legi igitur possunt hae proprietates in ipsa proiectione stereographica sphaerae* (fig. 30).

Confirmatur in primis curvatura constans positiva plani elliptici, quae est (non minus quam supra sphaeram) $+ 1/R^2$; est ipsa curvatura quae reapse colligitur ex expressione (I) elementi linearis, ratione habita de regulis calculi quibus curvatura deducitur ex functionibus E, F, G ipsius elementi, quae sunt in praesenti casu :

$$E = G = \frac{4\, a^2 R^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} \; ; \qquad F = 0$$

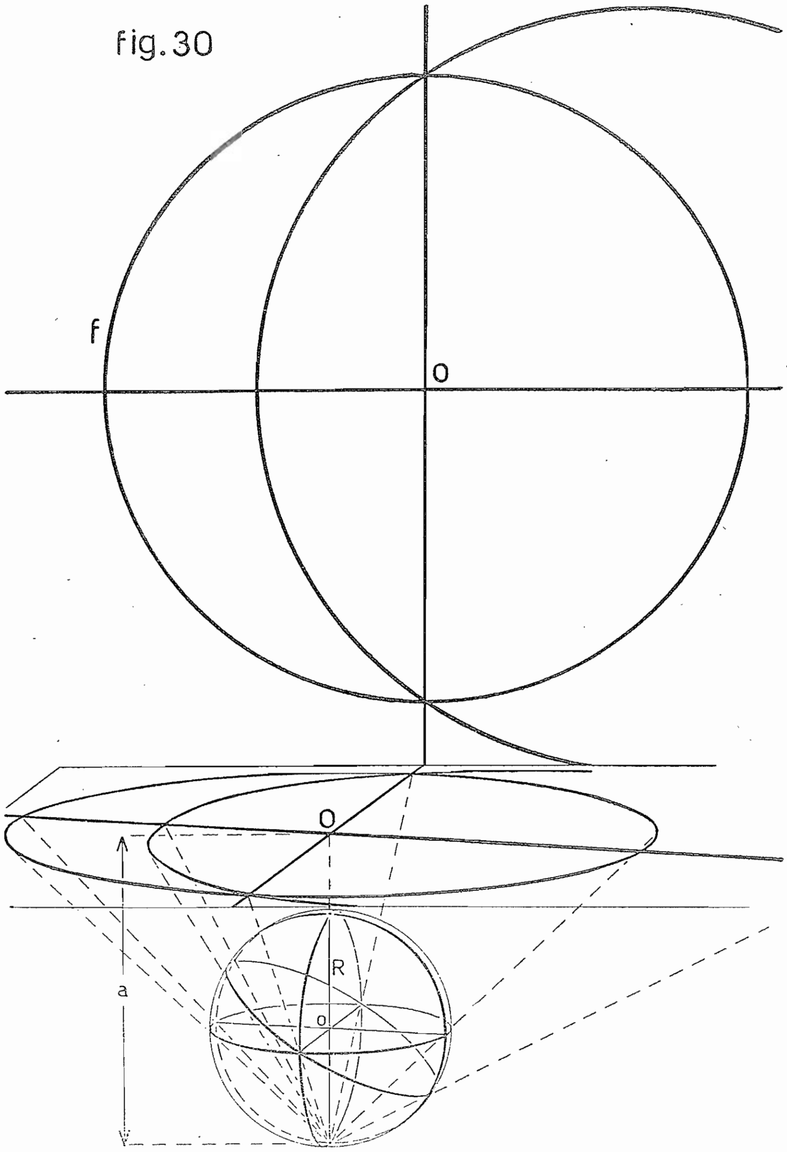
---

* Fig. 29 ostendit relationes quae per proiectionem stereographicam ponuntur inter coordinatas polares sphaerae (u = colatitudo ; v = longitudo) et coordinatas polares plani ; scilicet :

$$\varrho = a \operatorname{tg} \frac{u}{2R} ; \qquad \varphi = v$$

ex quibus formulis (adhibitis regulis calculi differentialis) deducuntur relationes inter differentialia $d\varrho$ et du, $d\varphi$ et dv ; quae relationes vertunt expressionem elementi linearis sphaerae in elementum lineare I.

fig. 30



Notentur dein lineae plani repraesentantes rectas plani elliptici :

per proiectionem stereographicam lineae geodeticae sphaerae (seu circuli maximi) *vertuntur in circulos secantes circulum fundamentalem in punctis e diametro oppositis ;* hi circuli igitur (pro regula metrica statuta) sunt lineae geodeticae nostrae repraesentationis et imagines rectarum plani elliptici.

Statim apparet non dari in plano elliptico rectas parallelas (quae mutuo non se secent), sicut necessario secantur inter se quivis bini circuli secantes eundem circulum in punctis e diametro oppositis.

Character isogonus repraesentationis sinit ut statim legantur variae proprietates plani elliptici spectantes angulos ; scilicet :

— *quadrangulus birectangulus isosceles completur duobus angulis obtusis ;*

— *summa angulorum triangulorum excedit duos rectos ; et excessus geodeticus crescit una cum area trianguli. Non dantur propterea figurae similes ;*

— *Maxima area trianguli* habetur cum singuli anguli aequant π et excessus geodeticus est $3\pi - \pi = 2\pi$; tunc area aequat aream semisphaerae $2\pi R^2$; colligitur igitur denuo curvatura plani elliptici $K = 2\pi/2\pi R = + 1/R^2$, quae est ipsa curvatura sphaerae euclideae, cuius radius aequet dimensionem fundamentalem R plani non euclidei.

d. Proprietates topologicae plani elliptici.

Nostra repraesentatio plani elliptici, cum referat imaginem totius plani, exprimit non solum proprietates metricas huius plani non euclidei, sed etiam eius proprietates topologicas.

Integrum planum ellipticum dicendum est in primis repraesentatum intra circulum fundamentalem (vel etiam intra quemlibet circulum imaginem lineae rectae plani elliptici) ; quod dicendum est si supponitur servatum in plano elliptico postulatum I Euclidis, asserens per duo definita puncta non transire nisi unam rectam. Haec condicio enim iam non ser-

vatur si imago plani elliptici exhibetur per totam proiectionem stereographicam sphaerae : per puncta enim e diametro opposita circuli fundamentalis transit infinita series linearum geodeticarum, sicut infinita series circulorum maximorum transeunt per puncta e diametro opposita sphaerae.

Concludimus integrum planum ellipticum (*si servandum est postulatum I Euclidis*) *repraesentari per aream internam circuli fundamentalis ;* et etiam dicendum est bina puncta e diametro opposita huius circuli non esse nisi imaginem duplicatam unius puncti plani elliptici (sicut in proiectione cylindrica sphaerae duo puncta extrema cuiusvis paralleli sunt imago duplicata unius puncti sphaerae).

Sequuntur propterea proprietates topologicae vere novae :

— *Planum ellipticum est superficies quae clauditur in seipsam ;* item clauditur in seipsam quaevis eius recta. *Longitudo integrae rectae est πR, et area totius plani $2\pi R^2$* (*R* denotat dimensionem fundamentalem plani non euclidei, quae relationem ponit inter formam et extensionem figurarum : cfr. n. 6).

— *Nulla linea clausa dividit in duas partes planum ellipticum ;* sed hoc planum, etiamsi consideretur caesum iuxta lineam clausam (quae potest etiam esse linea recta), manet unitum ; (consideretur quaevis linea clausa intra circulum fundamentalem vel quivis eius diameter ; connexio plani servatur per puncta e diametro opposita eiusdem circuli fundamentalis, quae sunt imago duplicata unius puncti plani elliptici).

— *Linea continua duci potest quae coniungat duo puncta symmetrica respectu cuiusvis rectae r, et quae tamen non secet rectam r ;* (ob eandem rationem supra expositam).

Si admittimus vero in plano elliptico non stare postulatum I Euclidis, tunc habetur planum duplicatum respectu prioris iam considerati : planum manet clausum in seipsum sicut superficies sphaerica ; eius area est $4\pi R^2$; longitudo rectae est $2\pi R$; dantur autem antipodes, per quos transit infinita series rectarum, et non una sola recta.

31. Repraesentatio plani elliptici iuxta methodum geometriae proiectivae.

Geometria proiectiva (ut explicatur in Appendice II) *vi suiipsius naturae, aptissima est quae interpretetur omnem geometriam : euclideam et non euclideam ; ellipticam et hyperbolicam ; bidimensionalem et tridimensionalem.* Tamen, brevitatis causa, nonnisi pauca dicemus de his repraesentationibus, cum de iisdem spatiis non euclideis sufficientes notitias iam nobis comparent repraesentationes conformes, quae etiam (ad finem nostrum) utiliores sunt. In appendice II vero exponemus nonnullas animadversiones maioris momenti circa geometriam proiectivam.

Repraesentatio plani elliptici in plano euclideo (iuxta methodum geometriae proiectivae) *plane congruit cum imagine, quam supra planum euclideum obtinet sphaera, si superficies sphaerica proicitur in planum e suo centro* (fig. 31).

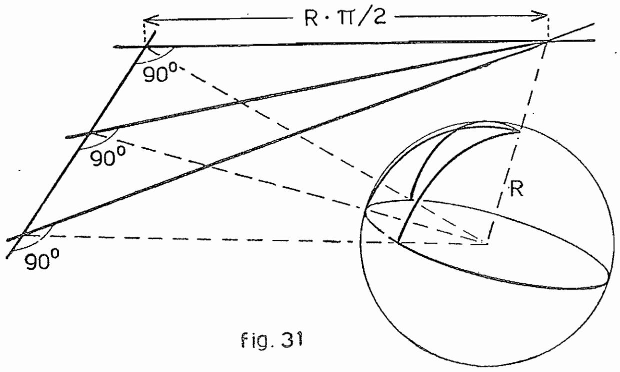


fig. 31

Hac ratione rectae plani elliptici (non minus ac omnes circuli maximi sphaerae) repraesentantur per totidem rectas plani Π (euclidei). Haec repraesentatio extenditur ad totum planum Π ; neque dantur ulla bina puncta per quae transeat plus quam una recta.

Quaevis bina puncta e diametro opposita sphaerae proiciuntur in unum punctum plani Π, quod est imago unius puncti plani

elliptici; quod dicendum est etiam cum recta proiciens fit parallela plano Π; propterea *duo puncta infinite distantia cuiusvis rectae plani Π censenda sunt imago unius puncti plani elliptici.* Congruenter igitur cum repraesentatione conformi iam considerata, planum ellipticum denuo se exhibet ut superficiem in seipsam clausam. Apparent igitur eae ipsae proprietates configurationis plani elliptici, quas iam nobis exhibuit eius repraesentatio conformis.

Ad proprietates metricas quod attinet, notemus in primis mensuras supra planum ellipticum congruere cum mensuris propriis superficiei sphaericae; quare:

— *longitudo totius rectae plani elliptici* (repraesentatae per integram rectam plani Π) est πR (sicut mensura semicirculi maximi sphaerae); et *area totius plani* est $2\pi R^2$.

— *non dantur igitur ulla puncta infinite distantia; deficiunt consequenter rectae parallelae,* quarum punctum commune factum sit infinite distans. Ipsae *rectae orthogonae uni rectae r* (fig. 31) *concurrunt in unum punctum,* cuius distantia a recta r est $R \cdot \pi/2$ (sicut distantia poli sphaerae ab aequatore). Duae rectae plani Π, quae sint parallelae iuxta aspectum euclideum repraesentationis, censendae sunt imagines duarum rectarum plani elliptici quae mutuo se secant: puncta enim infinite distantia illarum rectarum non sunt nisi imago unius puncti non infinite distantis plani elliptici.

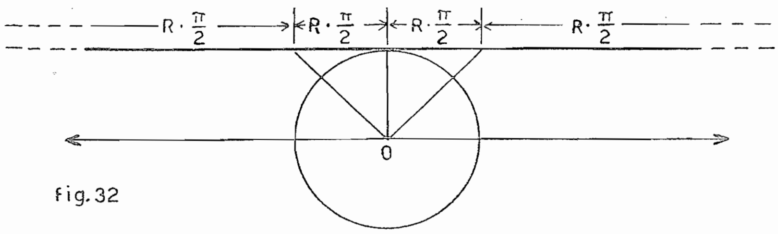


fig. 32

— *Figurae* 31 *et* 32 *satis illustrant rationem qua extensiones propriae plani elliptici* (sive longitudinales sive angulares) *deformantur in suis imaginibus supra planum Π.* Pari ratione alterandae sunt unitates mensurae ut colligantur ex repraesentatione ipsae mensurae propriae plani elliptici.

B. Repraesentationes plani hyperbolici

32. Repraesentatio conformis plani hyperbolici intra circulum.

a. Praevia repraesentatio supra semisphaeram.

Iam indicavimus rationem qua — per proiectionem stereographicam — tota infinita extensio plani euclidei colligitur et repraesentatur supra sphaeram (cfr. n. 29, fig. 28) ; *analoga ratione repraesentatur supra superficiem sphaericam planum hyperbolicum ; quae repraesentatio est et ipsa conformis.*

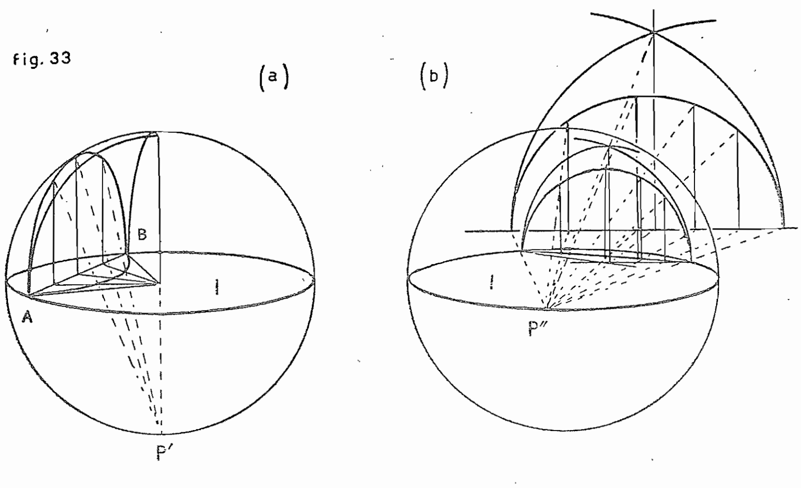
Hae duae repraesentationes (plani euclidei et hyperbolici), quamvis analogae, necessario exhibent etiam notas diversas ; et haec discrimina illustrant diversas proprietates plani euclidei et plani hyperbolici.

Paucis innuimus similitudines et differentias duarum repraesentationum :

— ad repraesentandum planum euclideum adhibetur integra superficies sphaerica ; et unum punctum P sphaerae (polus scilicet proiectionis stereographicae) est imago (infinite contracta) omnium punctorum plani infinite distantium ;

— si repraesentandum vero est planum hyperbolicum, tota eius infinita extensio contrahitur supra dimidiam sphae-

Fig. 33



ram ; et circulus maximus l — limitans hanc semisphaeram (fig. 33) — est imago punctorum infinite distantium plani non euclidei ;

— *in priore repraesentatione, rectae plani euclidei vertuntur in tot circulos sphaerae qui transeunt omnes per polum* P *proiectionis stereographicae ;*

— *in repraesentatione vero plani hyperbolici imagines* (r) *rectarum constituuntur semicirculis qui secant iuxta angulum rectum circulum limitem* l*; quare unicuique rectae competunt duo distincta puncta* A B *infinite distantia iuxta duas oppositas directiones ; quare etiam, per quodlibet punctum* P *duci possunt binae parallelae rectae* r *iuxta eius duas distinctas oppositas directiones* (v. fig. 46, n. 40).

Plura dein dicemus (n. 40) de hac repraesentatione ; nonnulla interim de ea notavimus quia facilem viam aperit ad declarandas alias repraesentationes plani hyperbolici : ipsa enim — ut iam dictum est — illustrationem recipit ex analoga repraesentatione plani euclidei supra sphaeram ; ex ipsa denique *deducuntur — per proiectiones stereographicas — duae novae repraesentationes plani hyperbolici supra planum euclideum.*

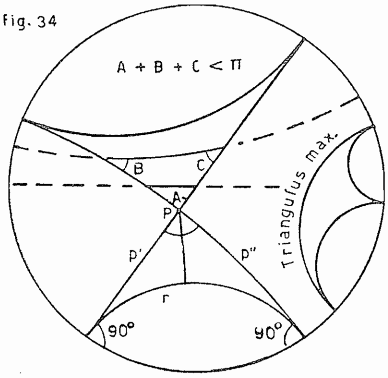
Figura 33 (a, b) indicat has proiectiones : altera (ex polo P' lineae limitis l) proicit semisphaeram in aream circularem planam contentam intra eundem limitem l ; altera proiectio (ex polo P'' pertinente lineae l) proicit semisphaeram in semiplanum xz. Utraque proiectio — utpote stereographica — invariatum servat characterem conformem repraesentationis.

De his duabus repraesentationibus plani hyperbolici supra planum euclideum agunt sequentes paragraphi (n. 32, b, c ; nn. 33-37).

b. Elementum lineare in repraesentatione plani hyperbolici intra circulum.

Haec repraesentatio plani hyperbolici (supra portionem plani euclidei contentam intra circulum) *omnino respondet illi repraesentationi plani elliptici* (de qua iam actum est), *quae etiam continetur intra circulum* (cfr. n. 30, fig. 30).

Fig. 34



Utraque repraesentatio est conformis ; in priori, lineae geodeticae plani elliptici exprimuntur per segmenta circularia quae secant circulum limitem in binis punctis e diametro oppositis ; in nova vero repraesentatione, lineae geodeticae plani hyperbolici exprimuntur per segmenta circularia quae secant circulum limitem iuxta angulum rectum (figg. 33, 34).

Elementa linearia duarum repraesentationum sunt plane analoga : sicut geometria hyperbolica censeri potest velut geometria elliptica cuius dimensio fundamentalis R facta est imaginaria, ita elementum lineare exprimens geometriam ellipticam supra planum euclideum (n. 30, b ; form. I) vertitur in analogum elementum lineare geometriae hyperbolicae, si pro dimensione fundamentali R ponitur dimensio imaginaria iR (ponendum etiam ia pro a, quia a et R sunt dimensiones homogeneae).

His substitutionibus peractis, obtinetur quaesita expressio elementi linearis, quo reproducitur supra planum euclideum geometria plani hyperbolici ; scilicet* :

$$(\mathrm{I}') \qquad ds^2 = 4\, a^2\, R^2\, \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 - a^2)^2}$$

* Nonnisi breviter tractamus de hac repraesentatione quia magis accuratum examen de proprietatibus plani hyperbolici aptius fiet per novam eius repraesentationem, de qua agit sequens paragraphus 33.

Indicamus nihilominus methodum qua elementum lineare praesentis repraesentationis directe colligitur ex proprietatibus plani hyperbolici (neglecta eius analogia formali cum elemento lineari geometriae ellipticae).

Elementum lineare plani hyperbolici, si refertur ad eius coordinatas polares u, v (u = distantia puncti P ab origine O ; v = angu-

Quae formula confirmat totam infinitam extensionem plani hyperbolici repraesentari intra circulum cuius radius est a (fig. 34); cum enim puncta (x, y) plani Π accedunt ad hunc circulum limitem, expressio $x^2 + y^2 - a^2$ tendit ad valorem nullum; quapropter mensurae quae tribuuntur elementis vel infinitesimis plani tendunt ad infinitum, et puncta circuli $x^2 + y^2 = a^2$ repraesentant puncta infinite distantia plani hyperbolici.

c. Proprietates plani hyperbolici.

Lineae rectae plani hyperbolici repraesentantur per eas lineas plani euclidei, quae (pro regula metrica statuta) obtinent minorem mensuram inter quaevis bina puncta infinite

---

lus quem radius OP efformat cum definita directione $v = 0$), scribitur (cfr. n. 20):

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{Sh}^2 \frac{u}{R} dv^2 \tag{a}$$

Correlatio statuatur inter puncta (u, v) plani hyperbolici et puncta plani euclidei, quae definiantur per coordinatas polares (ϱ, φ). Formulae, quibus referuntur inter se binae coordinatae u, ϱ et v, φ sint analogae illis quae, per proiectionem stereographicam, statuuntur inter coordinatas sphaerae et coordinatas plani (cfr. n. 30, b); ponendae vero sunt (ob notam rationem) quantitates imaginariae ia et iR pro quantitatibus realibus a et R.

Ponantur igitur sequentes relationes inter coordinatas plani hyperbolici et coordinatas plani euclidei:

$$\varrho = a \cdot \operatorname{Th} \frac{u}{2R} \quad ; \qquad \varphi = v$$

Adhibitis regulis calculi differentialis, deducuntur relationes inter elementa infinitesima $d\varrho$ et du necnon inter $d\varphi$ et dv; etiam $\operatorname{Sh} u/2R$ exprimitur per coordinatam ϱ.

Novae expressiones, quas obtinent $du, dv, \operatorname{Sh} u/2R$ (ut functiones variabilium ϱ, φ) ponuntur in forma (a) elementi linearis plani hyperbolici et obtinetur sequens formula:

$$ds^2 = 4\, a^2 \cdot R^2 \frac{d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\varphi^2}{(\varrho^2 - a^2)^2} \tag{a'}$$

qua instituitur supra planum euclideum peculiaris regula metrica reproducens ipsas proprietates metricas plani hyperbolici.

Tandem, si in forma (a') elementi linearis, pro coordinatis polaribus ϱ, φ ponuntur earum expressiones ut functiones coordinatarum cartesianarum x, y, obtinetur forma (I') elementi linearis.

proxima ; hae autem lineae sunt tot circuli qui secant iuxta angulum rectum circulum limitem* (fig. 34). Cum autem tota extensio plani reproducatur intra circulum limitem, considerande non sunt nisi ea segmenta circulorum quae continentur intra eundem limitem. Si lineae circulares repraesentantes rectas plani hyperbolici transeunt per originem O, earum radius est infinitus et ipsae fiunt segmenta recta.

Statim conspicimus, per hanc repraesentationem, proprietatem characteristicam plani hyperbolici de binis parallelis.

Repraesentatio est conformis (quam proprietatem agnoscere possumus ex eodem indicio iam declarato in paragrapho 30, b). Consequenter immediate legere possumus in ipsa repraesentatione plures alias proprietates geometriae hyperbolicae ; ex. gr. :

— *angulus parallelismi decrescit dum crescit distantia puncti P a recta r* (fig. 34) ;

— *summa angulorum triangulorum minor est quam duo recti ;* qui defectus (seu excessus geodeticus negativus) crescit una cum area triangulorum ; haec proprietas manifestat curvaturam negativam plani hyperbolici ;

— *area triangulorum non potest extendi ultra definitum limitem ;* triangulus autem maximus habetur cum etiam defectus geodeticus factus est maximus, seu π : omnes igitur anguli facti sunt nulli, et triangulus constituitur tribus rectis inter se parallelis (in diversas vero directiones) (fig. 34).

Repraesentatio plani hyperbolici in semiplano euclideo.

33. Generaliora lineamenta et elementum lineare.

Imago plani hyperbolici (supra semisphaeram : cfr. n. 32 a, fig. 33, b) proiciatur per proiectionem stereographicam e puncto P'' circuli limitis : tota repraesentatio transfertur in semipla-

* Praetermittimus demonstrationem huius proprietatis ; quae ceteroquin apparebit ex iis quae dicentur de sequenti repraesentatione plani hyperbolici in semiplano euclideo : duae enim repraesentationes referuntur ad invicem per proiectiones stereographicas (cfr. n. 32, a) quae mutant circulos in circulos et non mutant angulos.

num $y > 0$; recta $y = 0$ absolvit nunc munus lineae limitis, et repraesentat puncta infinite distantia plani hyperbolici.

Rectae plani hyperbolici repraesentantur per semicirculos secantes iuxta angulum rectum lineam limitem $y = 0$. *Inter quos circulos geodeticos recensendae sunt etiam rectae* $x =$ const., quae respondent (per proiectionem stereographicam) semicirculis geodeticis transeuntibus per polum P proiectionis. Notemus etiam omnia puncta infinite distantia semiplani $y > 0$ non esse nisi imaginem, infinite dilatatam, unius puncti P.

Omnes igitur rectae $x =$ const. (plani euclidei) *sunt imagines rectarum parallelarum plani hyperbolici ; consequenter rectae* $y =$ const. *repraesentant oricyclos orthogonos dicto fasci parallelarum.*

Elementum lineare, quod reproducat supra semiplanum euclideum mensuras proprias plani hyperbolici, aptissime refertur ad coordinatas x, y ; cui systemati coordinatarum plani euclidei respondent — in plano hyperbolico — « coordinatae oricyclicae » (quarum lineae coordinatae sunt fascis rectarum parallelarum et fascis oricyclorum orthogonalium).

Nova expressio elementi linearis deduci potest ex elemento lineari (I′) (definiente geometriam hyperbolicam supra aream circularem planam) *si ratio habetur de duabus proiectionibus stereographicis per quas prior illa imago plani hyperbolici transfertur in semiplanum* $y > 0$ (cfr. n. 32, fig. 33) : definitae enim relationes analyticae referunt ad invicem coordinatas punctorum homologorum uniuscuiusque definitae proiectionis. *Omnibus autem computationibus peractis, obtinetur sequens expressio :*

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{II}$$

in qua formula, R denotat dimensionem fundamentalem plani hyperbolici. Confirmatur curvatura negativa $-1/R^2$ plani hyperbolici, quae per definitas operationes (cfr. n. 16) deducitur ex expressione elementi linearis.

Ipsa formula (II) *manifesto exhibet rectam* $y = 0$ *ut lineam limitem repraesentationis, imaginem punctorum infinite*

distantium : quo magis enim puncta plani euclidei accedunt ad hunc limitem, denominator expressionis (II) tendit ad valorem nullum, et mensura quae tribuitur elementis infinitesimis plani euclidei tendit ad valorem infinitum.

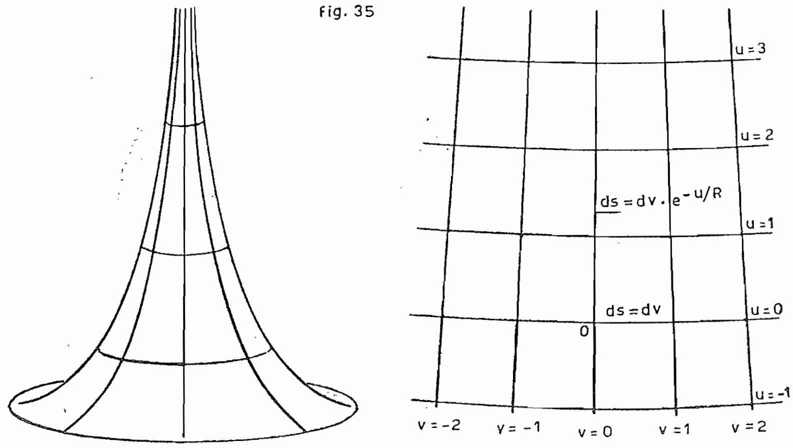
Expressio (II) *elementi linearis potest etiam colligi ex elemento lineari plani hyperbolici* (relato ad coordinatas oricyclicas), quod est (cfr. n. 19, n. 20 b, fig. 11 c et fig. 35) :

$$(\mathrm{II}_h) \qquad ds^2 = du^2 + e^{-\frac{2u}{R}} dv^2$$

Suatuenda in primis est apta correlatio inter puncta (u, v) plani hyperbolici et puncta (x, y) plani euclidei, per quae priora sunt repraesentanda. Ponantur igitur sequentes relationes :

$$x = v\,; \qquad y = R \cdot e^{\frac{u}{R}}$$

fig. 35



quare censenda sunt puncta homologa ea quibus (pro quovis $x = v$) competunt sequentes coordinatae :

in plano hyperbolico :	$u = +\infty$	$u = 0$	$u = -\infty$
in plano euclideo :	$y = +\infty$	$y = R$	$y = 0$

et sic totum planum hyperbolicum repraesentatur per semiplanum $y > 0$ (recta $y = 0$ manet limes inferior).

Definienda restat regula metrica ad aestimandas extensiones: quae regula adhibere debet coordinatas x, y plani euclidei, sed debet exprimere distantias inter homologa puncta u, v plani hyperbolici.

Quare adhibendum est ipsum elementum lineare plani hyperbolici, in quo vero coordinatae u, v exprimendae sunt ut functiones coordinatarum x, y.

Stantibus autem relationibus:

$$y = R \cdot e^{\frac{u}{R}} \qquad x = v$$

seu:

$$u = R \log \frac{y}{R} \qquad v = x$$

colligimus:

$$du = \frac{R}{y}\,dy \quad \Bigg| \quad e^{-\frac{u}{R}} = \frac{R}{y} \qquad dv = dx$$

$$du^2 = \frac{R^2}{y^2}\,dy^2 \quad \Bigg| \quad e^{-\frac{2u}{R}} = \frac{R^2}{y^2} \qquad dv^2 = dx^2$$

quae expressiones, introductae in elementum lineare (II_h), dant:

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Forma (II) *elementi linearis ostendit etiam hanc repraesentationem esse conformem:* intra ambitum enim infinitesimum circa duo puncta homologa plani hyperbolici et plani euclidei, una definita proportio stat inter quaevis elementa linearia homologa; repraesentatio igitur absolvitur per similitudinem isogonam (cfr. n. 30, b).

34. Lineae geodeticae.

Rectae plani hyperbolici repraesentantur per semicirculos orthogonos rectae limiti $y = 0$; quae lineae dicendae sunt lineae geodeticae plani euclidei si — ad aestimandas extensiones — adhibetur elementum lineare II.

Par proprietas iam enunciata est de praecedentibus duabus repraesentationibus plani hyperbolici (n. 32), sed nondum probata est ; sufficit vero ut probetur pro una tantum ex tribus repraesentationibus consideratis : hae enim transformantur inter se per proiectiones stereographicas, quae non alterant assertam proprietatem (sunt enim transformationes isogonae, quae mutant circulos in circulos).

Si consideramus repraesentationem plani hyperbolici in semiplano euclideo, *iam scimus rectas* $x =$ const. *repraesentare fascem rectarum parallelarum* (cfr. n. 33, a) ; rectae autem $x =$ const., orthogonae lineae $y = 0$, constituunt casum limitem (pro radio infinito) circulorum secantium iuxta angulum rectum lineam limitem.

Generalior autem forma lineae geodeticae obtemperare debet sequentibus condicionibus :

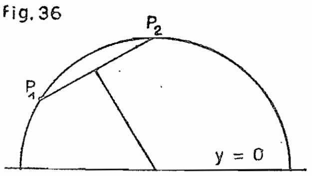
— debet esse linea curva, cuius duo puncta extrema (infinite distantia) pertinent rectae $y = 0$;

— ipsa linea, in utroque suo extremo, debet esse orthogona rectae limiti (efformare enim debet angulum nullum cum recta $x =$ const. quae attingit in eodem puncto rectam limitem : agitur enim de duabus parallelis, quarum punctum commune factum est infinite distans) ;

— forma eiusdem lineae debet esse talis quae plane determinetur assignatis duobus eius punctis $P_1\, P_2$ (haec enim proprietas competit rectae plani hyperbolici).

Iamvero semicirculus transiens per $P_1\, P_2$, *cuius centrum pertineat rectae limiti, obtemperat omnibus his condicionibus; non ita vero alius typus curvarum* (fig. 36).

Fig. 36



Mathematica tractatio problematis sequenti ratione absolvitur :

Generalior forma lineae geodeticae ea est in quam mutatur recta $x =$ const. si planum hyperbolicum supponitur moveri supra seipsum omnimoda libertate, et homologus motus producitur per semiplanum euclideum.

Iamvero generalior motus plani hyperbolici supra seipsum servat sequentes characteres :

— puncta infinite distantia manent talia ;

— cetera puncta possunt varie transferri, sed invariatas servant suas mutuas distantias.

Homologus autem motus semiplani euclidei vertit has condiciones in sequentes :

— recta limes $y = o$ non mutatur nisi in seipsam ;

— cetera puncta variis in modis mutare possunt suum locum ; ita tamen ut invariatae maneant eorum mutuae distantiae, aestimandae iuxta elementum lineare II.

Iamvero generalior transformatio semiplani in seipsum, quae his condicionibus obtemperet, ea est quae denominatur « affinitas circularis » (uni condicioni obnoxia servandi supra seipsum semiplanum $y > o$).

Affinitates autem circulares constituunt generaliores transformationes conformes, quae mutant circulos in circulos ; nominatim mutant rectas $x =$ const. aut in alias rectas $x =$ const. aut in circulos orthogonos rectae limiti.

Notandum. - Per huiusmodi transformationes* omnia puncta infinite distantia semiplani $y > o$ transferuntur in unum punctum rectae limitis ; quare omnia illa puncta constituunt imaginem (infinite dilatatam) unius puncti infinite distantis (cfr. n. 33).

35. Distantia inter duo puncta.

Extensiones plani euclidei aestimandae sunt iuxta elementum lineare II ut referant extensiones homologas plani hyperbolici ; elementum lineare directe non exprimit nisi intervalla infinitesima, sed per reiteratas applicationes sui (quarum summa computatur regulis calculi integralis) dat distantias finitas inter puncta dissita. Opportune considerantur mensurae harum distantiarum ut pateat ratio qua nostra repraesentatio plani hyperbolici deformat eius extensiones.

---

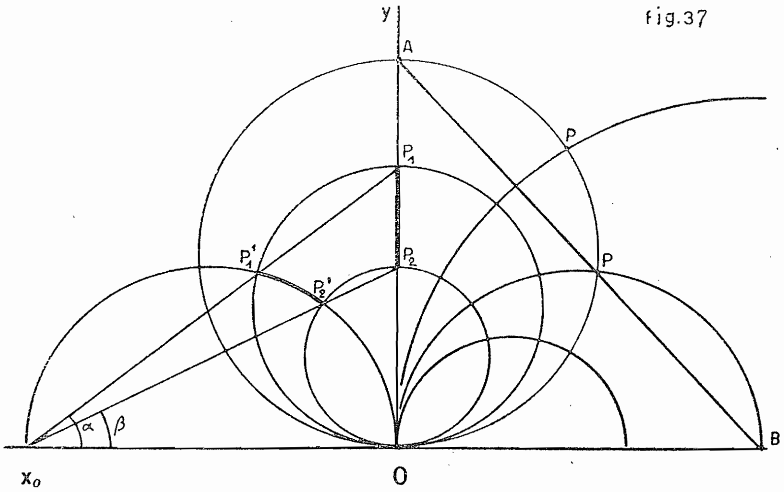
* « Affinitas circularis » constat duabus transformationibus ; quae sunt :

a) « Similitudo », quae potest invertire aut non invertire ordinem angulorum ;

b) « Inversio » respectu definiti circuli « fundamentalis » : puncta interna circuli fiunt externa et vicissim (manentibus vero singulis punctis supra eundem radium egredientem a centro O circuli fundamentalis) ; mutant denique inter se suum locum ea bina puncta $P_1 P_2$ pro quibus $O P_1 \cdot O P_2 = r^2$ ($r =$ radius circulis absoluti).

a. *Considerentur in primis duo puncta* $P_1 P_2$ *pertinentia eidem rectae* $x = \text{const.}$ (fig. 37) ; distantia inter homologa puncta plani hyperbolici statim colligitur ex eorum ordinatis $u_1 u_2$ (quae mensurantur iuxta lineam rectam — cfr. n. 33) :

fig.37



$$u_1 = R \cdot \log \frac{y_1}{R}$$

$$u_2 = R \cdot \log \frac{y_2}{R}$$

($y_1 y_2$ denotant ordinatas homologas plani euclidei)

Colligimus :

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{u_1 u_2} = R\left((\log \frac{y_1}{R} - \log \frac{y_2}{R}\right)$$

$$= R \cdot \log y_1/y_2$$

Quae formula ostendit segmenta disposita iuxta directionem axis y repraesentare pares extensiones plani hyperbolici quando eadem proportio stat inter binas extremas ordinatas (cartesianas) eorundem segmentorum. Qua de causa, in hac

repraesentatione, extensiones plani hyperbolici magis et magis (et in indefinitum) coarctantur quo magis earum imago accedit ad rectam limitem, et ex contrario magis ac magis dilatantur (et in indefinitum) quo magis earum imago recedit ab ipsa recta limite.

b. *Considerentur denique duo puncta* $P_1'\, P_2'$ *non pertinentia eidem rectae* $x = \text{const.}$; *semicirculus geodeticus transiens per haec puncta repraesentat rectam plani hyperbolici* (fig. 37).

Compleatur figura additis novis circulis geodeticis, quibus repraesentetur fascis rectarum parallelarum plani hyperbolici (collineantium in idem punctum O infinite distans). Huic « fasci circulorum » (considerandus interim ut figura propria plani euclidei) uniatur alter « fascis circulorum », quorum centra disponantur iuxta rectam $x = \text{const.}$, et qui omnes tangant idem punctum O.

Plures autem proprietates competunt talibus fascibus circulorum ; nominatim :

— duo fasces circulorum ubique mutuo se secant iuxta angulos rectos ;

— puncta intersectionis P duorum circulorum recta allineantur cum intersectionibus $A\ B$ eorundem circulorum cum axibus duorum fascium.

Consideremus nunc eandem figuram ut imaginem figurae homologae plani hyperbolici :

— prior fascis circulorum (ut iam notatum est) repraesentat fascem rectarum parallelarum ;

— alter fascis repraesentat lineas orthogonas dictis rectis parallelis, seu fascem oricyclorum ; quivis autem bini oricycli huius fascis sunt lineae aequidistantes.

Ex talibus significationibus et proprietatibus figurae statim colligimus :

$$\overline{P_1'\, P_2'} = \overline{P_1\, P_2} = R \cdot \log y_1/y_2 = R \cdot \log \mathrm{tg}\alpha/\mathrm{tg}\beta$$

$$= R \cdot \log \frac{y_1' \,/\, |x_1' - x_o|}{y_2' \,/\, |x_2' - x_o|}$$

quae formula exprimit (per coordinatas cartesianas plani euclidei) *distantiam* (hyperbolicam) *inter duo quaevis puncta.*

36. Proprietates characteristicae plani hyperbolici.

a. Binae rectae parallelae et angulus parallelismi.

Character isogonus repraesentationis sinit ut immediate in ipsa conspiciamus eas proprietates characteristicas plani hyperbolici, quae nexum habent cum amplitudine angulorum ; neque opus est ut nimiae explicationes addantur figuris (38, 39) quibus tota res describitur.

Fig. 38

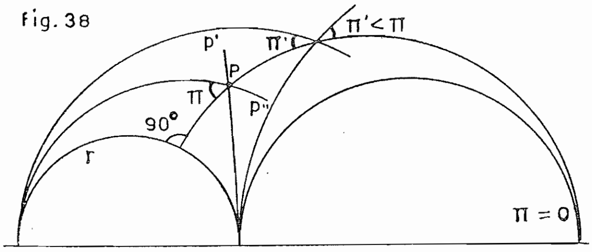
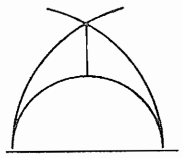


Fig. 39



Notentur proprietates sequentes :

Data recta r, per quodvis punctum P plani transeunt duae rectae p' p'' parallelae eidem rectae r in directiones oppositas.

Angulus parallelismi Π tendit ad angulum rectum si distantia δ inter P et r tendit ad valorem nullum ; decrescit vero Π quo maior fit distantia δ ; fit tandem nullus cum distantia δ facta est ∞ (fig. 38).

b. Defectus geodeticus triangulorum et trianguli maximi.

Summa angulorum triangulorum non attingit duos rectos. Qui defectus evanescit pro triangulis infinitesimis ; crescit una cum area triangulorum ; fit maximus (π) *cum latera trianguli sunt tres rectae parallelae* (in directiones diversas) : cui defectui maximo angulorum respondet area maxima triangulorum (cfr. fig. 34).

Proportio constans inter defectum geodeticum et aream triangulorum exprimit curvaturam (constantem, negativam $-1/R^2$) *plani hyperbolici.* Eadem curvatura colligi potest (per definitas regulas calculi) ex functionibus E, F, G elementi linearis.

c. Trianguli isosceles recti praediti altitudine maxima.

Haec proprietas, quam iam cognoverat Schweikart (qui etiam exacte definiverat altitudinem maximam h trianguli — cfr. n. 7), conspicue se exhibet per suam repraesentationem (fig. 39).

37. Fasces rectarum et cycli.

a. Tres typi fascium rectarum et cyclorum.

Varii fasces rectarum plani hyperbolici, proprii, improrii et ideales (cfr. nn. 19-20), *repraesentantur per totidem fasces circulorum prout indicant figurae* 40 a, b, c.

*Lineae orthogonae his fascibus sunt novi fasces circulorum**, *qui consequenter repraesentant cyclos, oricyclos et hypercyclos.*

Etiam hae figurae illustrant rationem qua extensiones propriae plani hyperbolici deformantur per hanc earum imaginem : omnia enim segmenta geodetica inter binos cyclos eiusdem fascis repraesentant pares extensiones plani hyperbolici.

b. Tres motus plani hyperbolici supra seipsum.

Ipsae figurae optime illustrant etiam varios motus quibus planum hyperbolicum moveri potest supra seipsum ; distinguuntur :

1) *Rotatio plani circa definitum punctum O* (fig. 40, a) : traiectoriae, quas percurrunt puncta plani sunt tot cycli concentrici ; relativus fascis (proprius) radiorum rotatur circa idem centrum O.

---

* « Fasces circulorum » orthogoni, de quibus iam dictum est in n. 35, habent in figura 40 ulteriorem repraesentationem.

« Considerandus est « circulus fundamentalis » f (v. fig. 40, a, c) determinans primam seriem circulorum : qui ii sunt, qui secant circulum f in duobus punctis O, O' e diametro oppositis ; alterum systema circulorum constituitur omnibus circulis (circa O et O') qui secant iuxta angulum rectum prius systema.

Hic duplex systema circulorum fit « degenere » cum circulus fundamentalis f reducitur ad punctum (cfr. fig. 40, b et casum consideratum in n. 35).

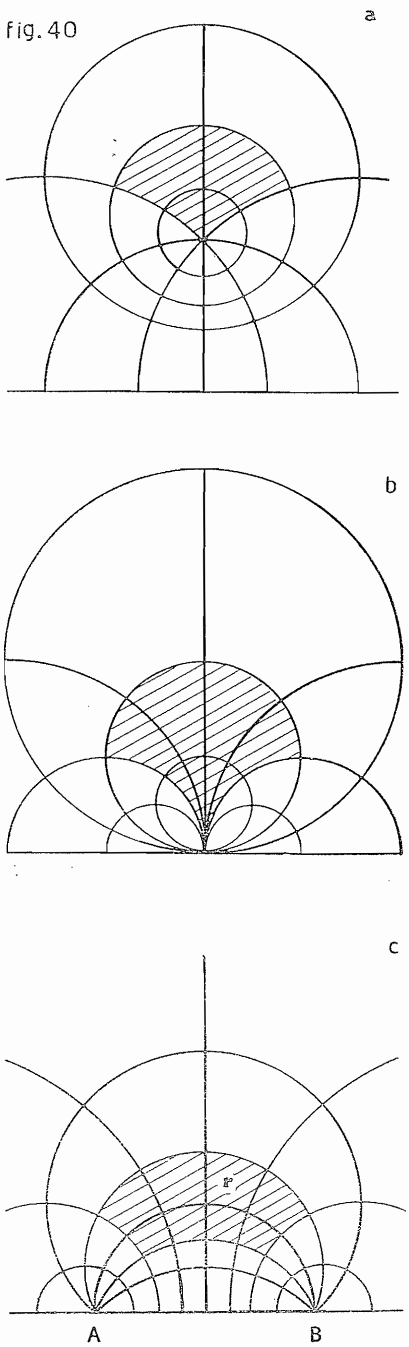
2) *Rotatio impropria circa punctum infinite distans* (fig. 40, b): traiectoriae constituunt systema oricyclorum, secans iuxta angulum rectum fascem improprium rectarum, seu fascem rectarum parallelarum (in unam directionem).

3) *Translatio plani iuxta rectam* r (fig. 40, c): puncta plani percurrunt simul tot hypercyclos, aequidistantes a recta r; et simul fascis idealis rectarum (secans r iuxta angulum rectum) transfertur supra seipsum.

Hic motus bene illustrat rationem qua nostra repraesentatio infinite comprimit (prope rectam limitem) extensiones infinitas plani hyperbolici: ambitus enim infinitesimi circa extrema A, B rectae r se exhibent tamquam receptacula inexhausta ex quibus hauriuntur (vel in quae compinguntur) extensiones infinitae plani hyperbolici.

His tribus motibus plani hyperbolici supra seipsum respondent (in eorum repraesentatione conformi) *totidem exempla affinitatis circularis* (cfr. n. 34) *transfor-*

fig. 40



mantis cyclos in cyclos, invariata manente recta limite $y = 0$. Supra hanc ipsam rectam, tertius typus affinitatis circularis (repraesentans translationem plani iuxta rectam r) relinquit immutata (seu « unita ») duo puncta A et B, extrema rectae r ; secundus typus affinitatis unitum relinquit unum punctum (seu potius duo puncta A, B quae iam in unum coinciderunt) ; primus vero typus affinitatis nullum punctum unitum relinquit supra rectam limitem, vel potius dicendum est (si attendimus ad expressionem algebricam affinitatis) manere unita duo puncta imaginaria coniugata.

c. Pseudosphaerae spatii euclidei applicatae plano hyperbolico.

Pseudosphaerae spatii euclidei et planum hyperbolicum sunt — pro pari dimensione fundamentali R *— superficies isometricae, praeditae pari curvatura : possunt igitur mutuo applicari sine deformatione suarum extensionum.*

Haec ipsa applicatio duarum superficierum potest repraesentari per ipsam imaginem plani hyperbolici exhibitam in semiplano euclideo.

Iam notavimus meridianos et parallelos trium pseudosphaerarum rotundarum (cfr. nn. 19, 20) plane conguere cum fascibus propriis, impropriis, idealibus plani hyperbolici et cum cyclis ipsis fascibus orthogonis. Unum discrimen datur : dum planum hyperbolicum in infinitum extenditur, superficies pseudosphaericae necessario limitatae sunt ; quare pseudosphaerae spatii euclidei possunt quidem applicari plano hyperbolico (ita ut etiam superponantur dicta systemata linearum), sed tegere non possunt nisi limitatam partem plani non uclidei. *In figuris* 40 *a, b, c notantur eae regiones plani hyperbolici, quas pseudosphaerae* (debita ratione apertae et explicatae) *tegunt sua superficie.*

38. Repraesentatio plani hyperbolici iuxta methodum geometriae proiectivae.

a. Regula metrica.

Totum planum hyperbolicum repraesentatur, iuxta methodos geometriae proiectivae, *intra ellipsim* (quae etiam potest

reduci — per aptam proiectionem — ad circulum ; v. figg. 41, 42, 43).

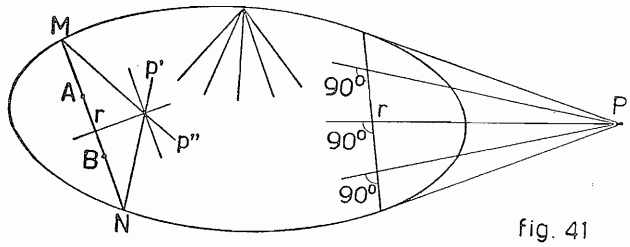


fig. 41

Puncta ellipsis repraesentant puncta plani infinite distantia. Linea recta (infinita) *plani hyperbolici repraesentatur per segmentum rectum contentum intra ellipsim.*

Regula metrica, applicanda plano euclideo ut in ipso legamus extensiones homologas plani hyperbolici, necessario dat mensuras quae discrepant ab extensionibus propriis plani euclidei : *ad aestimandam distantiam* (*hyperbolicam*) *inter duo puncta A, B, adhibenda est sequens formula :*

$$\overline{AB} = R/2 \cdot \log \frac{\overline{MA}/\overline{MA}}{\overline{MB}/\overline{NB}}$$

Quae regula manifesto tribuit mensuram infinitam quibusvis segmentis, quorum alterutrum extremum invenitur supra lineam limitem : nullum enim fit alterutrum segmentum $\overline{MA}$, $\overline{NB}$; consequenter infinitus fit logarithmus numeri nulli. Item competit mensura infinita toti segmento $\overline{MN}$ quo repraesentatur integra recta plani hyperbolici.

De statuta regula metrica amplior declaratio additur in appendice II ; interim ita potest illustrari (fig. 42) : *unitas mensurae, quae reiterate applicatur segmento mensurando, non manet invariata, sed continuo coarctatur* (et tandem fit infinitesima evanescens) *quo magis accedit ad conicam limitem ;* contrahitur autem sicut ostendit figura 42 : metrum (seu segmentum O - 1) transfertur per duplicem operationem proiectivam (e duobus centris S et S') supra duas rectas r et r' : quibus rei-

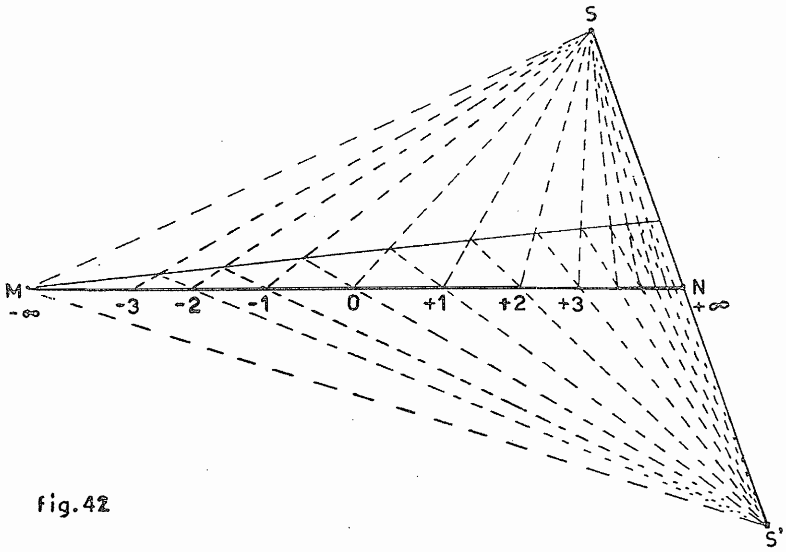


Fig. 42

teratis proiectionibus metrum magis ac magis contrahitur et tandem evanescit, ita ut, quantumvis in indefinitum applicetur, numquam attingat extrema segmenti MN ; mensura igitur infinita tribuitur cuivis segmento, cuius saltem unum extremum sit M aut N.

Analoga regula metrica adhibenda est ad aestimandos angulos (cfr. Append. II) : notemus tantum regulam tribuere mensuram nullam cuilibet angulo (non nullo in ipsa repraesentatione) cuius vertex sit supra conicam limitem : quo in casu latera anguli repraesentant rectas parallelas (quorum punctum commune factum est infinite distans) ; mensura vero $\pi/2$ (anguli recti) colligitur quoties alterum latus (r) transit per polum P alterius lateris (s) (fig. 41).

b. Proprietates plani hyperbolici.

Etiam in hac repraesentatione facile leguntur nonnullae proprietates characteristicae plani hyperbolici (fig. 41) :

— *Data recta r, per punctum ei externum P ducuntur duae rectae parallelae p' p'' pro duabus oppositis directionibus.*

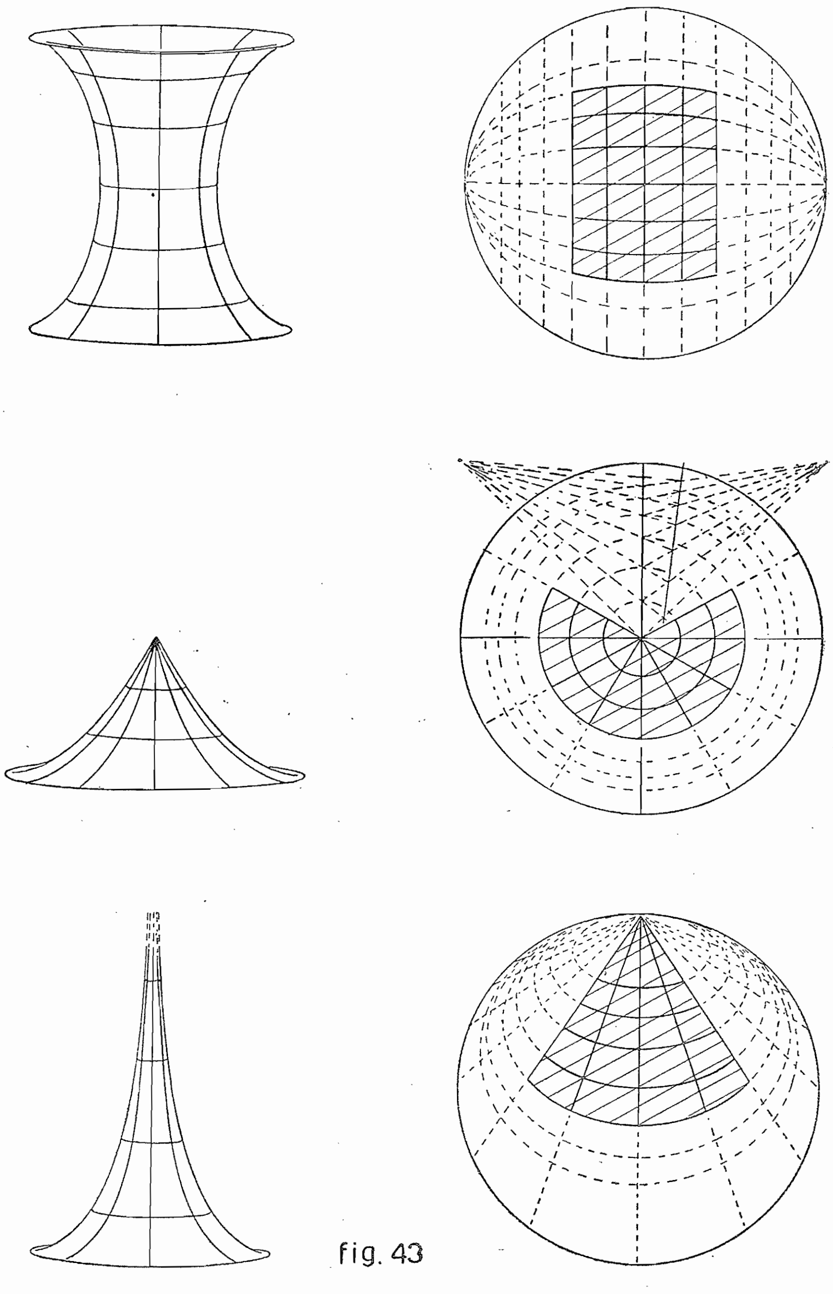


fig. 43

— *Summa angulorum triangulorum* tendit ad duos rectos si area trianguli fit infinitesima ; sed, quo amplior fit area trianguli, eo maior fit defectus geodeticus infra duos rectos, ita ut tandem habeatur defectus maximus (π) quando etiam area trianguli facta est maxima (triangulus tunc constituitur tribus rectis parallelis in directiones oppositas).

— Distinguuntur in plano hyperbolico *fasces proprii, improprii et ideales* rectarum (fig. 43 a, b, c), quarum lineae orthogonae sunt *cycli, oricycli* et *hypercycli*.

— *Supra planum hyperbolicum applicari possunt* (sine deformatione suarum extensionum) *superficies pseudosphaericae spatii euclidei quae gaudeant pari curvatura negativa* $-1/R^2$. Quod si agitur de tribus pseudosphaeris rotundis, meridiani harum superficierum congruunt cum fascibus rectarum (propriis, impropriis aut idealibus) plani hyperbolici ; et paralleli earundem pseudosphaerarum congruunt cum cyclis, oricyclis aut hypercyclis (fig. 43 a, b, c) ; pseudosphaerae vero euclideae, utpote necessario limitatae, non tegunt nisi limitatam regionem plani hyperbolici.

c. Motus plani hyperbolici et eorum imagines in repraesentatione ipsius plani.

Si planum hyperbolicum supponitur transferri supra seipsum, considerandae veniunt in eius imagine homologae translationes variorum punctorum. Non sine lege vero hae modificationes produci possunt ; quivis enim motus plani supra seipsum, invariatas servat mutuas distantias inter quaevis bina puncta ; praeterea puncta infinite distantia manent talia ; homologae igitur condiciones servandae sunt in transformatione imaginis plani.

Transformationes modificantes imaginem plani hyperbolici persolvuntur in praesenti per varias operationes proiectivas ; hae vero tales debent esse (ut debitae condiciones serventur) ut conica limes — repraesentans puncta infinite distantia — mutetur in seipsam ; invariatae etiam permanere debent — inter quaevis bina puncta intra conicam limitem — hae mutuae distantiae aestimatae iuxta traditam regulam (sed

haec altera condicio necessario sequitur priorem — v. Append. II).

Repraesentantur igitur motus plani hyperbolici per transformationes proiectivas eius imaginis, quae mutant in seipsam conicam limitem.

Distingui autem possunt *tres typi transformationum proiectivarum,* qui plane respondent iisdem tribus motibus plani iam descriptis in eius repraesentatione conformi (cfr. n. 37, b) :

Primus typus : transformatio proiectiva *non relinquit immotum* (seu sibi « unitum ») *ullum punctum conicae limitis :*

haec *transformatio repraesentat rotationem plani circa definitum punctum* (non infinite distans) ; manet propterea « unitum » (in transformatione proiectiva) punctum O repraesentans centrum rotationis ; circa hoc punctum rotatur fascis radiorum, et omnes cycli (quorum centrum sit O) vertuntur supra seipsos.

Secundus typus : transformatio proiectiva relinquit *unum punctum unitum supra conicam limitem :*

repraesentatur igitur rotatio (*impropria*) *plani circa punctum infinite distans ;* relativus fascis (improprius) rectarum rotatur circa idem punctum, et relativi oricycli transvehuntur supra seipsos.

Tertius typus : transformatio proiectiva relinquit *duo puncta unita* supra conicam limitem :

consequenter mutatur in seipsam recta coniungens illa duo puncta, et *transformatio repraesentat translationem plani iuxta dictam rectam ;* quare etiam omnes hypercycli aequidistantes ab eadem recta moventur supra seipsos.

39. Repraesentatio conformis plani euclidei in seipso.

Haec repraesentatio complet seriem praecedentium repraesentationum conformium et sub novo aspectu exhibet geometriam euclideam ut mediam inter geometriam hyperbolicam et ellipticam ; ostendit etiam novo exemplo (cfr. n. 29) relationes metricas euclideas componi posse etiam cum mensuris quae alterent extensiones, seu peractis unitatibus non rigidis.

Planum euclideum repraesentatur in seipso (sine alteratione angulorum) *si perficitur eius inversio* (per vectores reciprocos — cfr. n. 34 notam) *respectu definiti circuli* (fig. 44). Hac ratione omnia puncta infinite distantia plani colliguntur in unum punctum O, centrum inversionis ; quaevis recta mutatur in circulum transeuntem per O : rectae parallelae fiunt circuli qui transeunt per O iuxta eandem directionem : quae condicio refert proprietatem euclideam de unica parallela.

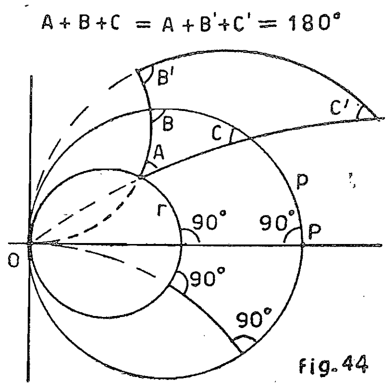


Fig. 44

Character conformis repraesentationis sinit ut immediate legamus in ipsa repraesentatione proprietates eucideals spectantes angulos : defectum geodeticum nullum ; angulum parallelismi rectum ; figuras similes.

Elementum metricum applicandum plano, ut colligamus relationes metricas euclideas, est :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

quod constituit casum limitem ad quem tendunt analoga elementa linearia hyperbolica et elliptica si radius a circuli fundamentalis fit nullus.

Quae condicio intermedia praesentis repraesentationis potest sequenti ratione illustrari : consideremus imaginem plani hyperbolici contentam intra circulum ; licet illam invertere respectu eiusdem circuli limitis, ita ut lineae geodeticae constituantur per ea segmenta circularia quae manent extra circulum. Imminuatur nunc radius circuli fundamentalis ita ut tandem fiat nullus : lineae geodeticae mutatae sunt in circulos qui transeunt omnes per idem centrum repraesentationis.

Aliis verbis : duo puncta infinite distantia rectae hyperbolicae — indicantia duas distinctas directiones — iam unita sunt in unum punctum, cui respondet una sola directo ; quare etiam binae parallelae distinctae geometriae hyperbolicae conveniunt in unam.

Notandum. - Haec nova imago plani euclidei deducitur etiam ex analoga eius repraesentatione supra sphaeram (n. 29, fig. 28) *per aptam proiectionem stereographicam :* polus proiectionis est punctum e diametro opposito origini O.

Caput III

REPRAESENTATIONES SPATIORUM TRIDIMENSIONALIUM

A. Repraesentatio conformis spatii hyperbolici in semispatio euclideo

40. Generaliora lineamenta repraesentationis.

a. Elementum lineare.

Methodus qua planum hyperbolicum repraesentatum est in semiplano euclideo immediate extenditur — addita una dimensione — ad repraesentandum totum spatium tridimensionale non euclideum (cfr. n. 33).

Elementum lineare est :

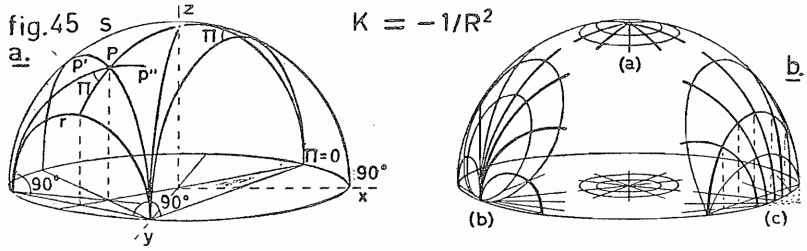
$$\text{(III)} \qquad ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

Planum $z = 0$ *constituit limitem repraesentationis*, et est imago omnium punctorum infinite distantium : cum enim puncta semispatii $z > 0$ accedunt ad planum $z = 0$, denominator elementi linearis imminuitur infra quemlibet vel minimum numerum, tribuens mensuras ingentes vel minimis segmentis spatii euclidei ; quae mensurae tendunt ad infinitum cum z tendit ad valorem nullum.

Forma elementi linearis indicat repraesentationem esse conformem (cfr. nn. 30, b ; 33).

Supra quodlibet planum orthogonum plano limiti manifesto instauratur eadem repraesentatio bidimensionalis plani hyperbolici, de qua iam actum est ; iam igitur apparent significationes linearum coordinatarum (fig. 45) :

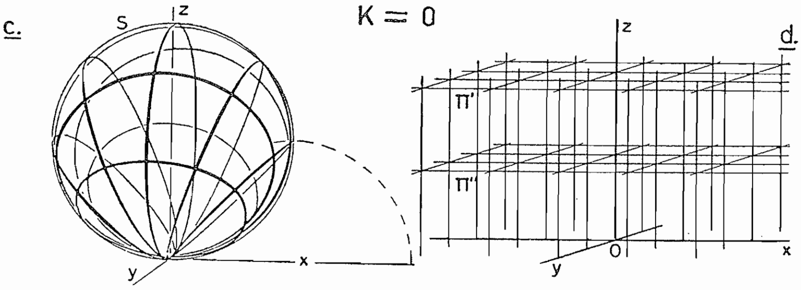
fig.45 a. $K = -1/R^2$ b.



S : imago plani hyperbolici
r : " rectæ
p' p'' binæ parallelæ rectæ r
Π : angulus parallelismi

(a) fascis proprius rectarum & cycli orthogoni eid. fasci
(b) fascis improprius & oricycli
(c) fascis idealis & hypercycli

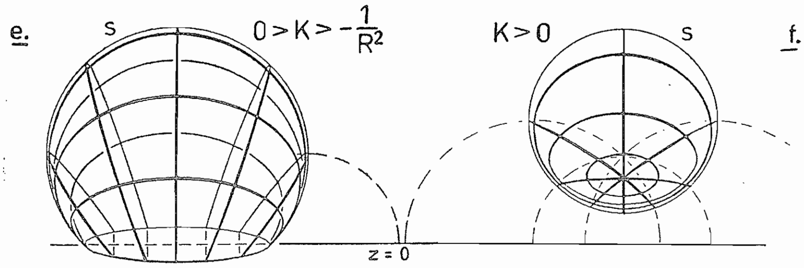
c. $K = 0$ d.



S : orisphæra & oricycli componentes 2 systemata orthogona geodeticarum æquidistantium (geometria euclidea)

Π',Π'': orisphæræ (centrum: $x, y = \infty$) 2 syst.$^{\underline{ta}}$ orthog.$^{\underline{na}}$ rectarum referunt 2 " " oricyclorum

e. $0 > K > -\frac{1}{R^2}$ $K > 0$ f.



S : hypersphæra & 2 syst.$^{\underline{ta}}$ orthogona hypercyclorum.

S : sphæra & 2 system.$^{\underline{ta}}$ orthogona cyclorum.

NB. Alterum systema cyclorum constat lineis geodeticis at non æquidistant.
" " " " " æquidistant." " geodeticis –

— *rectae parallelae axi* z (seu rectae $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$) *repraesentant systema* (stellam impropriam) *rectarum parallelarum* (in unam directionem) spatii hyperbolici ;

— *plana parallela plano limiti* ($z = \text{const.}$), *utpote orthogona stellae rectarum parallelarum, repraesentant tot orisphaeras* (cfr. n. 10, a) ; quare, supra unumquodque planum $z = \text{const.}$, duo systemata linearum coordinatarum, orthogona inter se ($x = \text{const.}$; $y = \text{const.}$), repraesentant duo systemata orthogona oricyclorum (fig. 45 d).

b. Rectae et plana.

Rectae spatii hyperbolici repraesentantur (non minus quam in repraesentatione bidimensionali) *per semicirculos orthogonos plano limiti ;* inter quos circulos recensendae sunt etiam rectae orthogonae plano limiti : sunt circuli quorum radii facti sunt infiniti (cfr. n. 32, fig. 33, fig. 45 a, d).

Plana spatii hyperbolici repraesentantur consequenter per integrum fascem linearum geodeticarum egredientium ex uno puncto P et pariter iacentium circa ipsum punctum ; tales autem lineae geodeticae componunt *semisphaeram orthogonam plano limiti.* Quare denuo obtinetur illa repraesentatio plani euclidei supra semisphaeram, de qua iam actum est (cfr. n. 32, a — fig. 45 a).

Etiam plana orthogona plano limiti, ut iam notatum est, repraesentant totidem plana spatii hyperbolici ; sunt vero et ipsa sphaerae quorum radii facti sunt infiniti.

c. Notae propriae spatii hyperbolici.

Congruenter cum repraesentationibus praecedentibus (v. n. 36, fig. 38) statim apparet *proprietas de duplici parallela.*

Character isogonus repraesentationis immediate manifestat ceteras proprietates geometriae hyperbolicae spectantes angulos ; in eadem figura 45 a sequentes proprietates describuntur :

— *angulus parallelismi decrescit cum crescit distantia puncti* P *a recta* r *;*

— *defectus geodeticus triangulorum crescit una cum area triangulorum ; deficiunt propterea figurae similes ;*

— *trianguli maximae extensionis constituuntur tribus rectis inter se parallelis* (in directiones oppositas).

d. Peculiaris proprietas topologica.

Peculiaris proprietas topologica distinguit spatium hyperbolicum a spatio euclideo : eam in lucem fert ille contactus qui instituitur inter duo spatia cum pseudosphaerae spatii euclidei applicantur plano hyperbolico, praedito pari curvatura (cfr. n. 37, c et figg. 40, a, b, c).

In spatio euclideo superficies pseudosphaericae ita evolvuntur ut nequeant in indefinitum extendi, sed necessario limitantur cuspidibus. *In spatio vero hyperbolico, eaedem superficies, applicatae plano hyperbolico, acquirunt talem flexionem sui ut eaedem proprietates metricae possint sine limite produci ;* quod fit per ipsum planum hyperbolicum (fig. 45, b).

Praeterea, in spatio euclideo, superficies pseudosphaericae nullo pacto possunt ita evolvi et flecti ut earum lineae geodeticae fiant lineae geodeticae etiam per spatium tridimensionale ; etenim, si per flexionem alter radius curvaturae crescit, ratione reciproca alter radius imminuitur, ita ut inter quaevis bina puncta lineae geodeticae semper duci possit corda brevior per spatium tridimensionale. *In spatio* vero *hyperbolico* res aliter se habent : ipsae *pseudosphaerae, applicatae plano, ita flexae sunt ut earum lineae geodeticae congruant cum rectis spatii tridimensionalis*(fig. 45, b).

41. Stellae et sphaerae.

Sicut in plano hyperbolico distinguuntur tres fasces rectarum (proprius — improprius — idealis), *item in spatio tridimensionali distinguuntur tres typi stellarum* (fig. 45, c, e, f — cfr. fig. 40).

1) *Stella propria :* eam constituunt omnes rectae et omnia plana quae transeunt per unum definitum punctum (non infi-

nite distans) ; repraesentatur autem per omnes sphaeras (imagines planorum) orthogonas plano limiti et transeuntes per unum punctum P ; necessario transeunt etiam per punctum P' (symmetricum puncto P respectu plani $z = 0$) ; P et P' dicuntur « basis » dictae collectionis sphaerarum ; quae collectio dicitur « rete sphaerarum ».

2) *Stella impropria :* eam constituunt rectae et plana quae transeunt per idem punctum improprium, cuius imago stat supra planum limite. Talis stella repraesentatur per peculiare rete sphaerarum (orthogonum plano limiti), cuius duo puncta « basis » iacent supra ipsum planum $z = 0$ et unita sunt in unum.

3) *Stella idealis :* eam constituunt omnes rectae et plana quae secant unum idemque planum iuxta angulum rectum. Repraesentatur per novum rete sphaerarum (semper orthogonum plano limiti), cuius puncta « basis » facta sunt imaginaria.

N.B. - Omne rete sphaerarum constituitur integra collectione fascium sphaerarum ; qui fasces repraesentant totidem fasces planorum spatii hyperbolici, quorum axes diversimode diriguntur in ipso rete.

Similiter, sicut in plano hyperbolico distinguuntur tres typi cyclorum (cycli — oricycli — hypercycli), *item in spatio tridimensionali distinguuntur tres typi sphaerarum* (fig. 45, c, d, e, f — cfr. fig. 40).

1) *Sphaerae propriae :* omnis sphaera « propria » est superficies secans iuxta angulum rectum definitam stellam (cuius vertex est centrum sphaerae). Collectio omnium sphaerarum concentricarum repraesentatur per « fascem sphaerarum », cuius « puncta limites » sunt symmetrica respectu plani $z = 0$.

2) *Orisphaerae :* sunt superficies orthogonae stellae impropriae. Collectio omnium orisphaerarum, quae sint orthogonae uni eidemque stellae, repraesentatur per « fascem sphaerarum », cuius duo « puncta limites » unita sunt in unum supra planum $z = 0$.

Peculiaris fascis orisphaerarum repraesentatur per plana (euclidea) parallela plano limiti ; agitur de illo fasci orisphae-

rarum, qui secat iuxta angulum rectum illam stellam quae repraesentatur per rectas et plana (euclidea) orthogona plano limiti.

3) *Hypersphaerae :* secant iuxta angulum rectum stellam idealem, et constituunt tot superficies aequidistantes ab ipso plano fundamentali stellae ; fascis hypersphaerarum repraesentatur per fascem sphaerarum, cuius « puncta limites » facta sunt imaginaria coniugata.

Conclusio.

Omnis sphaera spatii euclidei repraesentat quandam sphaeram spatii hyperbolici ; repraesentat autem sphaeram propriam, orisphaeram aut hypersphaeram prout non tangit, tangit aut secat planum limitem. Inter has sphaeras recensenda sunt etiam plana (spatii euclidei), quae sunt sphaerae praeditae radio infinito : ipsa autem repraesentant orisphaeras si sunt parallela plano limiti ; repraesentant vero hypersphaeras si sunt obliquae eidem plano $z = 0$. Si denique sunt orthogona plano limiti repraesentant plana (hyperbolica) quae constituunt limites ad quos accedunt fasces hypersphaerarum.

Lineae geodeticae cuiusvis sphaerae sunt lineae iuxta quas ipsae sphaerae secantur a planis diametralibus ; quae sectiones sunt cycli, oricycli, hypercycli pro diversa specie sphaerarum. Quare omnis circulus spatii euclidei semper repraesentat quemdam cyclum spatii hyperbolici : repraesentat autem cyclum, oricyclum aut hypercyclum prout non tangit, tangit aut secat planum limitem.

42. Curvatura sphaerarum.

a. Curvaturae variantes inter extrema $-1/R^2$ et $+\infty$

Planum hyperbolicum, hypersphaerae, orisphaerae et sphaerae constituunt seriem superficierum, quarum curvatura variatur modo continuo inter $-1/R^2$ et $+\infty$.

Curvatura negativa $-1/R^2$ *competit plano hyperbolico,* quod constituit limitem ad quem accedunt hypersphaerae.

Curvatura hypersphaerarum manet negativa ; variatur autem inter extrema $-1/R^2$ et 0 prout eorum distantia a

plano hyperbolico variatur inter 0 et infinitum ; cum haec distantia facta est infinita, hypersphaera coincidit cum plano limite ; quod etiam constituit terminum dividentem orisphaeras ab hypersphaeris.

Orisphaerae, praeditae curvatura nulla, sunt mediae inter hypersphaeras (curvatura negativa) *et sphaeras* (curvatura positiva). Sub novo aspectu igitur geometria euclidea, quae est geometria orisphaerarum, apparet ut media inter geometriam hyperbolicam et sphaericam.

Tandem *curvatura sphaerarum est positiva :* variatur autem inter extrema 0 et $+\infty$ prout radius sphaerae variatur inter $+\infty$ et 0.

b. Relationes inter curvaturam sphaerarum (propriarum) et earum radios.

Curvatura cuiusvis superficiei sine exceptione exprimitur (in quavis geometria) *per proportionem inter excessum geodeticum figurarum et earum aream.*

Si de geometria euclidea agitur, haec ipsa curvatura exprimi etiam potest per binos radios curvaturae binarum sectionum praecipuarum superficiei iuxta formulam $K = 1/r_1 \cdot r_2$ (cfr. n. 15) ; quae formula dat, pro sphaeris euclideis, $K = 1/R^2$ (R = radius sphaerae).

Si vero agitur de spatiis non euclideis, curvatura superficierum nequit pari ratione exprimi per dictos radios curvaturae (qui sunt externi superficiebus) ; nominatim, ad sphaeras quod attinet, curvatura nequit exprimi per simplicem formulam $1/R^2$.

In appendice III notantur et comparantur tres series formularum iuxta quas aestimanda sunt nonnulla entia geometrica (ut : longitudo circuli — area circuli — area superficiei sphaericae — curvatura sphaerae — volumen sphaerae) prout haec entia pertinent spatio elliptico, euclideo aut hyperbolico ; pro variis spatiis stant regulae metricae diversae, quae etiam renuntiant peculiaria discrimina inter proprietates configurationis.

c. Curvaturae variarum sphaerarum expressae per earum imagines in spatio euclideo.

1. *Si de orisphaeris agitur, earum curvatura nulla immediate apparet ex ipsa expressione quam acquirit elementum lineare III supra plana* $z =$ const., quae sunt tot imagines orisphaerarum ; elementum enim lineare acquirit formam euclideam (cfr. fig. 45) :

$$ds^2 = \frac{R^2}{k^2}(dx^2 + dy^2) \qquad \begin{aligned} z &= k \\ dz &= 0 \end{aligned}$$

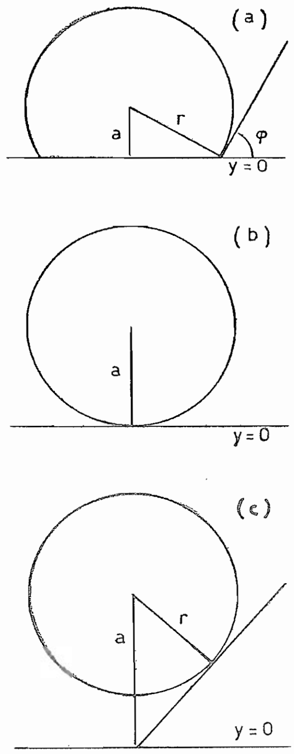
2. *Curvatura hypersphaerarum facile deducitur ex peculiari forma quam elementum lineare acquirit supra eas hypersphaeras quae repraesentantur per plana inclinata respectu plani limitis* (fig. 46, a).

Si φ denotat angulum (euclideum) quem efformant duo dicta plana, ex expressione elementi linearis deducitur curvatura :

$$K = -\frac{\sin^2\varphi}{R^2}$$

Quae conclusio immediate extenditur ad quamlibet hypersphaeram, repraesentatam etiam per sphaeram, dummodo stet idem angulus φ inter planum limitem et imaginem hypersphaerae : si par enim est iste angulus, duae hypersphaerae mutari possunt altera in alteram per aptum motum spatii (qui non alterat angulos repraesentationis conformis*) ; quare colligimus simplicem expressionem curvaturae hypersphaerae per positionem et radium eius imaginis :

fig. 46



* Cfr. n. 44.

$$K = -\frac{\sin^2\varphi}{R^2}$$

$$= -\frac{r^2 - a^2}{r^2} \cdot \frac{1}{R^2}$$

$$= \frac{a^2 - r^2}{r^2 \cdot R^2}$$

Quae formula applicatur etiam cuilibet sphaerae tangenti plano limiti, repraesentanti orisphaeram praeditam curvatura nulla ; cum stet in hoc casu aequalitas (fig. 46, b) :

$$a = r$$

formula dat :

$$K = \frac{0}{r^2 \cdot R^2} = 0$$

3. *Tandem eadem formula applicari potest etiam ceteris sphaeris,* nec secantibus nec tangentibus planum limitem, quae repraesentant sphaeras proprias (fig. 46, c).

Haec conclusio deducitur ex formula definiente curvaturam sphaerarum in spatio hyperbolico (v. Append. III) si in ipsa radius sphaerae exprimitur per illam formulam logarithmicam (cfr. n. 35) qua distantiae spatii euclidei aestimandae sunt ut referant extensiones proprias spatii hyperbolici.

Colligitur eadem formula ac pro curvatura hypersphaerarum et orisphaerarum :

$$K = \frac{a^2 - r^2}{r^2 \cdot R^2}$$

quae dat in praesenti curvaturam positivam cum sit $a > r$.

Notandum.

Quae exposita sunt illustrant novo exemplo quo pacto diversae regulae metricae conferant curvaturas diversas uni eidemque superficiei.

Repraesentationes planorum elliptici et hyperbolici supra planum euclideum iam nobis exhibuerunt varia elementa

linearia, quae — applicata plano euclideo — ei tribuunt curvaturam positivam et negativam (cfr. n. 28).*

Accedit nunc exemplum unius eiusdemque superficiei sphaericae, praeditae definito radio r, *cui tribuuntur diversae curvaturae* (positivae — nullae — negativae) prout regula metrica (applicans idem elementum lineare III) illud refert ad diversa plana limites, quae — pro variis casibus — dictam sphaeram non tangunt, tangunt, secant.

Item dantur sphaerae, praeditae radio diverso, quae induunt parem curvaturam, si — variante radio r — variatur etiam eorum distantia a a plano limite, ita ut invariata maneat expressio $(a^2 - r^2)/r^2$ (fig. 47).

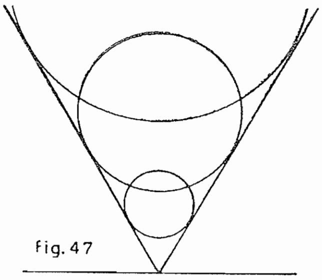


Fig. 47

43. Relationes inter geometriam euclideam orisphaerae et trigonometriam plani hyperbolici.

Superficies orisphaerica, characteristica spatii hyperbolici, praebuit primum fundamentum, cui innixi Gauss, Lobačewski et Bolyai potuerunt construere trigonometriam plani hyperbolici (cfr. n. 10) : stat enim supra orisphaeram geometria euclidea ; accedunt definitae et sufficientes relationes inter geometriam orisphaerae et geometriam plani hyperbolici, ut colligi possit trigonometria hyperbolica et tota nova geometria non euclidea.

Omnia autem elementa huius processus possunt prae oculis haberi ope nostrae repraesentationis spatii hyperbolici.

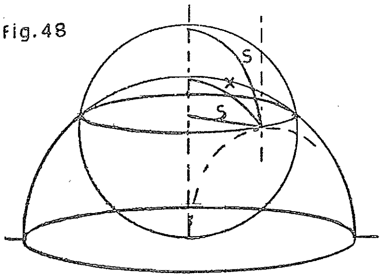
a. Longitudo circuli in plano hyperbolico.

Figura 48 exhibet orisphaeram et planum (hyperbolicum) quae mutuo se secant iuxta circulum ; qui circulus propterea pertinet utrique superficiei ; eius radius supra planum sit x, et radius orisphaericus sit segmentum oricyclicus S.

---

* Planum dicitur induere curvaturas varias quatenus consideratur non iam ut exhibens — suis propriis extensionibus — imaginem deformatam alterius superficiei ; sed consideratur in seipso ut exhibens suas proprias extensiones, quae vero aestimantur iuxta peculiares regulas metricas.

fig. 48



Si longitudo circuli refertur ad radium oricyclicum, cum supra orisphaeram stent relationes euclideae, scribendum est :

$$\bigcirc\, x = 2\pi S$$

Potuit autem definiri segmentum S ut functio distantiae x; scilicet:

$$S = S(x) = k \cdot \mathrm{Sh}\,\frac{x}{k}$$

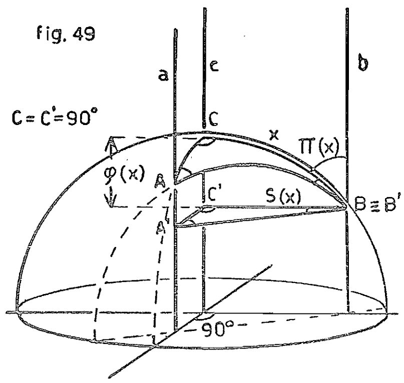
colligitur propterea formula (iam a Gauss definita : cfr. n. 6) referens longitudinem circuli ad eius radium supra planum hyperbolicum :

$$\bigcirc\, x = 2\pi k \cdot \mathrm{Sh}\,\frac{x}{k} = \pi k\,(e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{x}{k}})$$

b. Trigonometria plani hyperbolici.

Comparentur triangulus planus $A\ B\ C$ *et triangulus orisphaericus* $A'\ B'\ C'$ *dispositi ut in fig.* 49 : vertices duorum triangulorum sint intersectiones plani et orisphaerae cum iisdem rectis $a\ b\ c$, parallelis inter se ; orisphaera sit orthogona isti fasci parallelarum ; planum, transiens per B, sit orthogonum rectae a; consequenter sunt aequales inter se anguli $A\ C\ B$ et $A'\ C'\ B'$; qui construantur recti.

fig. 49



Comparantur hac ratione duo trianguli recti, alter planus, alter orisphaericus.

Comparentur nominatim duo latera homologa duorum triangulorum : latus rectum x, et latus oricyclicus $S(x)$; earum

mutua relatio iam supra considerata est (cfr. a). Accedunt duo elementa, interposita inter duos triangulos, quae etiam exprimi possunt ut functiones distantiae x : angulus parallelismi $\Pi(x)$ et segmentum rectum $\varphi(x)$. His tribus functionibus competunt sequentes expressiones :

$$S(x) = k \cdot \operatorname{Sh} \frac{x}{k}$$

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = 1/\operatorname{Sh} \frac{x}{k}$$

$$\varphi(x) = \log 1/\sin \Pi(x)$$

Iamvero hae *tres functiones ponunt sufficientes relationes inter triangulum orisphaericum et triangulum planum, quarum gratia relationes trigonometricae* (iam notae) *trianguli orisphaerici vertantur in homologas relationes inter elementa trianguli plani* : sic construitur trigonometria hyperbolica.

44. Motus spatii hyperbolici et superficies cylindricae.

a. Varii motus possibiles et eorum imagines in reprasentatione conformi.

Motus plani hyperbolici in seipso (qui iam considerati sunt : cfr. n. 37, b) repraesentantur in semiplano euclideo per affinitates circulares, quae servent invariatam rectam limitem $y = 0$.

Analoga ratione considerari possunt motus spatii hyperbolici in seipso et imagines talium motuum in semispatio euclideo.

Si attendimus ad ipsos motus spatii hyperbolici, sequentes condiciones admittendae sunt :

— *puncta infinite distantia manent talia ;*

— *cetera puncta invariatas servant suas mutuas distantias.*

Iamvero, ratione habita de modo quo puncta et rectae et superficies spatii hyperbolici repraesentantur in semispatio euclideo, dictae condiciones in sequentes vertuntur :

— puncta semispatii euclidei (repraesentantia motus homologorum punctorum spatii hyperbolici) multifaria transferri possunt ; sed :

— puncta plani limitis manere debent supra idem planum ;

— cetera puncta invariatas debent servare suas mutuas distantias aestimatas iuxta elementum lineare III.

Generalior autem transformatio semispatii euclidei, quae his condicionibus obtemperet est « affinitas sphaerica » quae non transferat planum limitem.

« Affinitas sphaerica » servat invariatos angulos, mutat sphaeras in sphaeras, et consequenter sphaeras orthogonas plano limiti in sphaeras pariter orthogonas eidem plano. Quae omnia significant plana transferri in alia plana et rectas transferri in alias rectas ; pro regula denique qua aestimandae sunt distantiae (cfr. n. 35), invariatae permanent omnes distantiae inter quaevis bina puncta.

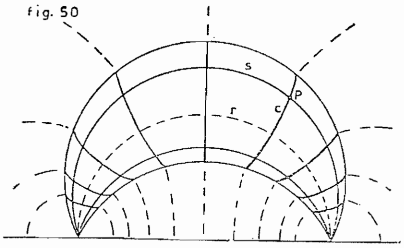
Dum spatium hyperbolicum movetur in seipso, et imago eiusdem motus producitur in semispatio euclideo per congruam affinitatem sphaericam, supra planum limitem $z = 0$ producitur quaedam affinitas circularis ; quare tot typi motuum possunt distingui in spatio quot typi affinitatum circularium dari possunt supra planum. Quod criterium ducit ad definiendam varietatem sexies infinitam motuum : sex autem sunt motus elementares qui *distingui possunt : tres translationes iuxta tres directiones orthogonas, et tres rotationes circa axes inter se orthogonos ; quibus motibus elementaribus componuntur omnes ceteri motus possibiles* (qui tamen sint rigidi, non alterantes ullam distantiam).

Generalior forma motus competit motui helicoidali iuxta traiectoriam curvam.

b. Motus generantes superficies cylindricas.

Considerentur vero a nobis duo simplices motus elementares : translatio spatii iuxta definitam rectam, et rotatio circa eandem rectam. Qui motus ducunt ad considerandas superficies cylindricas, quibus competit curvatura nulla etiam in spatio hyperbolico.

Moveatur in primis spatium uno motu translationis ita ut recta r transferatur supra seipsam (fig. 50); omne punctum spatii simul percurrit lineam aequidistantem ab r: consideretur nominatim definitum punctum P, cuius traiectoria est hypercyclus s (qui terminatur eisdem punctis extremis rectae r).



Rotetur dein spatium circa eandem rectam r: punctum P percurrit nunc traiectoriam circularem c, contentam in plano orthogono eidem rectae r; radii huius circuli constituunt fascem rectarum, cuius centrum stat supra ipsam rectam r (quae condiciones plane determinant imaginem circuli c in repraesentatione conformi). Simul cetera puncta hyperciycli s percurrunt pares traiectorias circulares, quae iacent omnes supra plana orthogona rectae r; aliis verbis, hypercyclus s describit superficiem cylindricam circa axem r. Eandem superficiem cylindricam generat circulus c (necnon ceteri circuli considerati) cum fit translatio spatii iuxta rectam r.

Cylindrus igitur spatii hyperbolici repraesentatur per peculiarem « cyclidem Dupin », praeditam duobus punctis conicis positis supra planum limitem.*

---

* Dicuntur « cyclides » superficies quarti ordinis, quae admittunt decem series sectionum circularium. Formae vero degeneres descendunt ad ordinem inferiorem.

Peculiares varietates harum superficierum denominantur « cyclides Dupin ». Inter eas recensendus est « torus », cuius forma reproducitur in figura (n. 49, b — fig. 56, b); haec superficies admittit quatuor series sectionum circularium. Ceterae cyclides Dupin possunt omnes derivari ex thoro per inversionem per radios vectores reciprocos.

Seposita exacta descriptione mathematica harum transformationum, variae formae cyclidum Dupin possunt facile concipi ut deformationes tori: si de toro agitur, circulus gulae est concentricus cum circulo peripherico maximo; supponatur nunc superficies ita deformari ut circulus gulae non servet pristinam positionem, sed transferatur; dari possunt sequentes casus (fig. 51): 1) circulus gulae parum transfertur ita ut nondum tangat circulum periphericum (cyclides nondum acquirunt puncta conica); 2) constituitur in uno puncto contactus

Notandum.

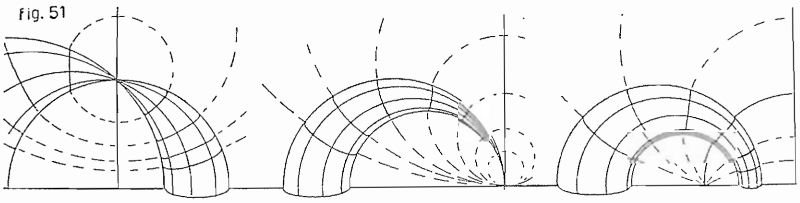
Ipsa ratio qua superficies cylindrica generata est ostendit eam posse transferri supra seipsam iuxta duas directiones orthogonas, ita ut eius puncta describant duo systemata traiectoriarum orthogona inter se (quae traiectoriae sunt etiam lineae geodecae cylindri, quia eius intersectiones cum planis orthogonis) ; iamvero *hae condiciones probant talibus cylindris competere proprietates euclideas et curvaturam nullam* (cfr. nn. 2 ; 10, a).

Eadem curvatura nulla competit igitur etiam cyclidi repraesentanti cylindrum, si eius extensiones aestimantur elemento lineari III : applicata enim hac regula metrica, obtinentur mensurae extensionum homologarum in spatio hyperbolico, et consequenter reproducitur ipsa curvatura nulla.

Novo igitur exemplo illustratur possibilitas modificandi curvaturam superficierum si ipsis applicantur peculiares regulae metricae. In praesenti casu tribuitur curvatura constans nulla superficiei, quae (si attendimus ad eius proprietates intrinsecas iuxta geometriam gaussianam) *exhibet curvaturam variam :* alibi *positivam*, alibi *negativam*, necnon *nullam* per limitem intermedium.

In spatio euclideo curvatura nulla competit non solum cylindris sed etiam conis ; in spatio vero hyperbolico coni gaudent eadem curvatura negativa $-1/R^2$ *ac plana.* Repraesentantur ceterum etiam coni per cyclides Dupin, quae aliter tamen disponendae sunt respectu plani limitis, sicut ostendit figura 51 (repraesentans conos, quorum lineae directrices sunt constan-

fig. 51



---

inter duos dictos circulos (cyclides acquirunt unum punctum conicum) ; 3) deformatio ultra procedit (cyclides acquirunt duo puncta conica distincta).

ter circuli, sed quorum vertices sunt — pro variis casibus — punctum proprium, improprium, ideale).

Eaedem igitur cyclides acquirunt curvaturam constantem nullam aut negativam prout idem elementum lineare III refertur ad planum limitem diversimode secans cyclides (cfr. figg. 50 et 51).

45. Repraesentatio spatii hyperbolici intra sphaeram.

Si imago spatii hyperbolici in semispatio euclideo subicitur operationi inversionis per radios vectores reciprocos (cfr. n. 34, notam, n. 39) *cuius centrum ponatur in semispatio* $z > 0$, *tota repraesentatio integri spatii hyperbolici colligitur intra quandam sphaeram limitem.*

Haec nova repraesentatio tridimensionalis omnino analoga est repraesentationi bidimensionali plani hyperbolici, contentae intra circulum, expositae in paragrapho 32.

Elementum lineare (quod definiri potest processu analogo ac pro problemate bidimensionali) est :

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad ds^2 = 4\,\mathrm{a}^2 \cdot R^2 \,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2}$$

Dempta tertia coordinata z, hoc elementum lineare reducitur ad ipsum elementum lineare (I′) repraesentationis bidimensionalis plani hyperbolici.

Etiam haec repraesentatio est conformis.

Opus non est ut perpendamus lineamenta huius novae repraesentationis, quae tantum addit tertiam dimensionem analogae imagini (fig. 34, n. 32) plani hyperbolici, illi conferendo symmetriam sphaericam. Tantum notemus rectas repraesentari per segmenta circularia orthogona sphaerae limiti, et plana per portiones sphaerarum etiam orthogonas eidem limiti; orisphaerae denique repraesentantur per sphaeras quae tangunt sphaeram limitem.

Notandum.

Speciatim notanda est peculiaris positio mutua, quam acquirere possunt duae orisphaerae (fig. 52) : *possunt se tangere*

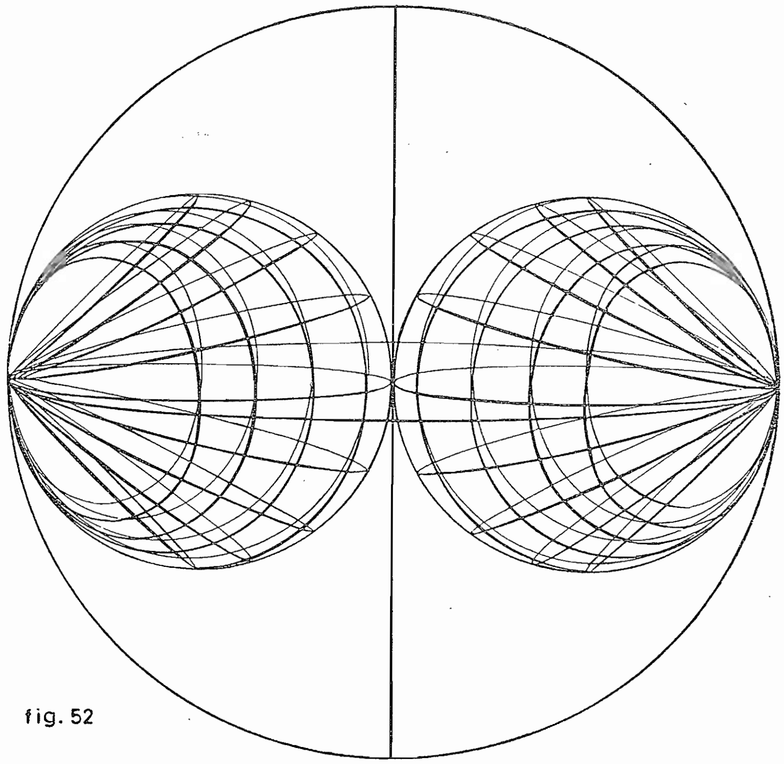


fig. 52

in uno puncto, et circa illud punctum recedere ab invicem iuxta omnem directionem.

Hunc typum mutuae positionis nullatenus acquirere possunt plana euclidea in spatio euclideo, quae, quacumque ratione flectentur, si in uno puncto mutuo se tangunt, necessario producunt mutuum contactum saltem per integram rectam.

Sed plana euclidea et orisphaerae sunt superficies isometricae, praeditae pari curvatura nulla ; quare possunt mutuo applicari. Quae condicio ostendit spatium hyperbolicum, pro sua configuratione, conferre superficiebus (et nominatim superficiebus praeditis curvatura nulla) liberiorem capacitatem flexionis.

De causa huius rei dein inquirendum erit.

B. Repraesentatio conformis spatii elliptici.

46. Elementum lineare et generaliora lineamenta reprasentationis.

Haec repraesentatio addit tertiam dimensionem repraesentationi plani elliptici, de qua iam actum est (cfr. n. 5, figg. 30 et 53).

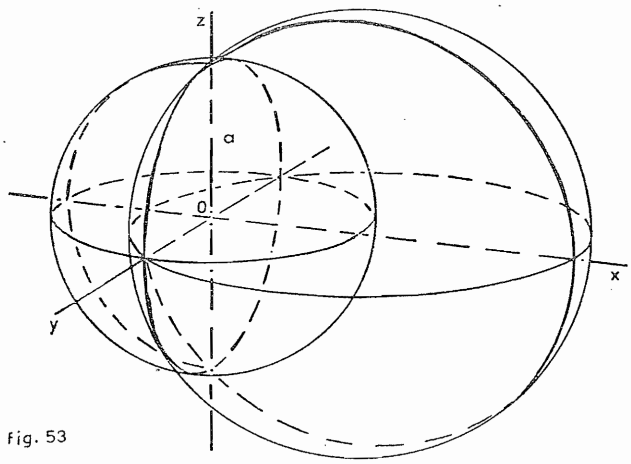


fig. 53

Eius elementum lineare potest propterea immediate deduci ex expressione bidimensionali (I), addita tertia coordinata z ; quare scribitur :

$$\text{(IV)} \qquad ds^2 = 4\, a^2 \cdot R^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2} .$$

Etiam potest idem elementum (IV) *deduci ex analogo elemento* (IV'), *iam definitum ad describendum spatium hyperbolicum* (cfr. n. 45), *si in ipso, pro a et R, ponitur ia et iR* (iuxta notam relationem qua referuntur ad invicem geometria elliptica et geometria hyperbolica ; eadem relatio stat inter elementa bidimensionalia I et I' describentia plana elliptica et hyperbolica).

Si demonstratio elementi linearis (IV) *plene absolvenda est, considerandum est in primis elementum lineare, quod competit ipsi spatio elliptico, adhibitis coordinatis* u, v, w, *analogis coordinatis polaribus spatii euclidei :* ϱ, θ, φ (ϱ indicat distantiam ab origine O ; θ indicat colatitudinem ; φ indicat longitudinem). Ratione autem habita de relationibus metricis propriis spatii elliptici, scribendum est :

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 \frac{u}{R} \left(dv^2 + \sin^2 \frac{v}{R} \cdot dw^2\right)$$

Statuitur denique biunivoca correlatio inter puncta (u, v, w) *spatii elliptici et homologa puncta* $(\varrho, \theta, \varphi)$ *spatii euclidei*, quibus priora sunt rapraesentanda. Formulae autem, quibus ternae coordinatae referuntur ad invicem, analogae sunt illis quibus (per proiectionem stereographicam — cfr. n. 5) referuntur inter se coordinatae punctorum supra sphaeram et coordinatae (polares) supra planum euclideum.

Positis his relationibus, omnes termini elementi linearis spatii elliptici iam scribi possunt ut functiones coordinatarum ϱ, θ, φ *spatii euclidei ;* et colligitur sequens expressio :

$$ds^2 = 4\, a^2 \cdot R^2 \frac{d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2 + \varrho^2 \cdot \sin^2\theta \, d\varphi^2}{(\varrho^2 + a^2)^2}$$

Si tandem ex coordinatis polaribus fit transitus ad coordinatas cartesianas x, y, z, obtinetur expressio IV.

Prout ipsum elementum lineare sua forma indicat, *repraesentatio est conformis* (cfr. n. 30).

Imago spatii elliptici (fig. 53) omnino congruit cum imagine plani elliptici (fig. 30 n. 30), cui tertia coordinata superaddita confert symmetriam sphaericam respectu originis axium.

Rectae igitur *huius spatii non euclidei repraesentantur per circulos secantes in punctis e diametro oppositis sphaeram fundamentalem* (praeditam radio a). Consequenter plana repraesentantur per sphaeras quae secant eandem sphaeram fundamentalem iuxta circulos maximos.

Character isogonus repraesentationis sinit ut immediate in ea legantur proprietates geometriae ellipticae spectantes angulos (de quibus vero iam repetenda non est mentio).

Primi auctores geometriae non euclideae, retinentes propositionem Euclidis de recta infinita, consideraverant solum spa-

tium hyperbolicum et neglexerant spatium ellipticum ; dein Riemann, nova methodo aggrediens problema (cfr. Append. II), pari titulo utrumque spatium recensuit inter series completas variarum geometriarum. Tandem factum est ut potius seponeretur spatium hyperbolicum, cum spatium ellipticum magis ideoneum agnitum sit quo describeretur forma universi.

Admissa recta finita in se clausa, duo spatia elliptica consideranda veniunt : simplex et duplex (cfr. n. 30, d).

Spatium simplex admittendum est si retinetur postulatum euclideum de unica recta per quaevis bina puncta ; quo in casu, repraesentatio totius spatii absolvitur intra sphaeram fundamentalem, et puncta e diametro opposita eiusdem sphaerae censenda sunt imago duplicata unius eiusdemque puncti spatii elliptici.

Si vero spatium ellipticum duplicatur, eius repraesentatio extenditur ad totum spatium euclideum, et admittendi sunt antipodes per quos non una geodetica transit, sed infinita series continua geodeticarum. In hoc casu, puncta infinite distantia spatii euclidei non sunt nisi imago — infinite dilatata — unius puncti spatii elliptici, e diametro oppositi puncto centrali O.

47. Proprietates configurationis spatii elliptici.

a. Spatium finitum et clausum.

Spatium ellipticum dicendum est clausum in seipsum non minus quam omne eius planum (cfr. n. 30, d). Hanc proprietatem legimus in ipsa eius repraesentatione ; quae etiam indicat longitudinem uniuscuiusque lineae geodeticae et superficiem singulorum planorum : cum enim elementum lineare reproducat easdem mensuras quae competunt sphaerae praeditae radio R, sequentes conclusiones immediate colliguntur :

— *longitudo cuiusvis lineae rectae* (quae potius dicitur « pseudo-recta ») *est* $2\pi R$, *aut* πR si agitur de spatio dimidiato, eliminante antipodes.*

* Spatium ellipticum duplex (exhibens antipodes) consuevit dici « sphaericum » ; qua denominatione distinguitur a spatio elliptico simplici.

— *superficies cuiusvis plani est* $4\pi R^2$, *aut* $2\pi R^2$ in altero casu.

b. Antipodes aut plana praedita una facie.

In spatio elliptico non dimidiato agnoscendi sunt antipodes non minus quam supra sphaeram.

Et sicut omnis circulus maximus sphaerae eam dividit in duas partes aequales, ita omnis recta plani elliptici eum dividit in duas partes, et item omne planum dividit spatium in duas partes aequales.

Quod si spatium dimidiatur ut excludantur antipodes, novo et inopinato modo partes spatii elliptici nectuntur inter se :

— *recta,* ut iam notatum est (cfr. n. 30), *non dividit in duas partes planum ;* quod unitum manet etiamsi supponatur caesum iuxta lineam clausam ;

— pari de causa, *planum non dividit in duas partes spatium ;* quod unitum manet etiamsi supponatur caesum iuxta superficiem clausam ;

— *consequenter planum ellipticum dicendum est praeditum una facie :* aliis verbis, nequeunt in plano distingui duae facies oppositae, quae possint pingi duobus coloribus diversis ; sed unus color, sine interruptione diffusus, ad omnem faciem se extendit, tegens quamvis partem superficiei.

Hanc proprietatem manifestat ipsa repraesentatio spatii elliptici, si puncta e diametro opposita sphaerae fundamentalis sunt imago duplicata unius puncti spatii.

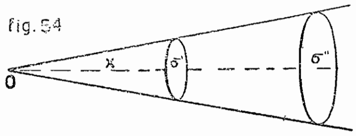
c. Superficies sphaericae et anguli solidi.

Si de geometria euclidea agitur, proportio simplex et constans stat inter superficies sphaericas σ *et angulos solidos* Ω — *quorum vertex sit centrum sphaerae — delimitantes ipsas superficies* σ (fig. 54) ; quae proportio exprimitur per potentiam secundam radii sphaerae :

$$\frac{\sigma}{\Omega} = x^2$$

Quare, si agitur de integro angulo solido (4π), integra superficies sphaerica exprimitur per notam formulam :

fig. 54



$$\sigma = 4\pi \cdot x^2 \qquad (x = \text{radius sphaerae})$$

Non ita res se habent in spatio elliptico ; sed, crescente radio x, superficies σ prius crescit fere sicut in spatio euclideo ; dein minus rapide ; attingit expansionem maximam cum distantia a vertice O est dimidia pars intervalli geodetici inter antipodes O et O'. Superata hac positione media, crescente x, σ decrescit ; convergit tandem in extensionem nullam cum accedit ad O'.

Res facile intelligitur : omnes enim rectae limitantes angulum solidum et superficiem σ, si egrediuntur ex O, tandem convenire debent in antipodem O'.

Si angulus solidus fit 4π (i. e. : est apertus ad totum spatium comprehendendum), area σ fit integra superficies sphaerica. Crescente radio x, superficies sphaerae sequitur easdem vicissitudines iam descriptas : extensio maxima habetur cum $x = R \cdot \pi/2$, et est $2\pi R^2$ (R denotans non iam radium x sphaerae, sed dimensionem fundamentalem spatii non euclidei) ; quae superficies minor est quam superficies sphaerae euclideae pro pari radio $x = R \cdot \pi/2$ (superficies enim sphaerae euclideae est : $\pi x^2 = \ldots \pi \cdot [\pi^2/4] \cdot R^2 = 2\pi \cdot [\pi^2/8] \cdot R^2$). Adhuc crescente radio x, superficies sphaerica imminuitur et eius extensio fit nulla cum radius aequat distantiam R inter duos antipodes O et O'.

Simili ratione volumen sphaerae (spatii elliptici), *crescente radio, prius crescit fere sicut volumen sphaerae euclideae ; dein semper minori proportione ;* cum tandem radius factus est maximus ($R \cdot \pi$), volumen est $2\pi^2 R^3$; quod volumen, comparatum cum volumine sphaerae euclideae — pari radio $R \cdot \pi$ praeditae — est fere eius sexta pars (vol. euclid. : $[4/3]\,\pi\,(\pi \cdot R)^3 = [4/3]\,\pi^2 \cdot \pi^2 R^3 = [36/3]\,\pi^2 R^3 = 12\,\pi^2 \cdot R^3$).

48. Proprietates spatii elliptici descriptae auxilio quartae dimensionis spatialis.

De spatio elliptico — in seipsum clauso — non valemus nobis fingere imaginem sensibilem. Possumus nihilominus eius formam ulterius declarare, describendo eius proprietates auxilio quartae dimensionis spatialis, cuius respectu curvetur spatium tridimensionale.

Etiam spatium tetradimensionale non potest a nobis repraesentari nostra imaginatione tridimensionali ; tamen efficax comparatio institui potest inter spatium tridimensionale curvum respectu quartae dimensionis et spatium bidimensionale (ex. gr. superficiem sphaericam) curvum respectu tertiae dimensionis (externae superficiei). Et haec analogia illustrat configurationem spatii curvi superioris ordinis, et nominatim illustrat eam rationem qua (in spatio elliptico) crescunt superficies sphaericae crescente earum radio.

Consideretur in primis sphaera (praedita radio R) *in spatio tridimensionali euclideo ;* et notetur angulus α quem efformant duo meridiani egredientes a polo O (fig. 55).

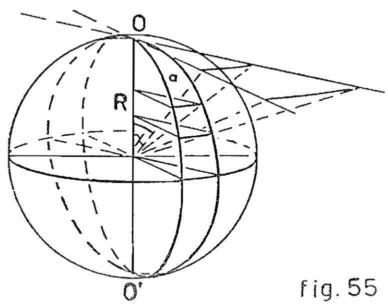


fig. 55

Idem angulus, translatus supra planum euclideum (tangens sphaeram in O) sustentat arcus qui magis ac magis extenduntur quo magis crescit distantia x a vertice.

Supra sphaeram vero aliter res se habet : intra ambitum satis limitatum circa O, proportiones figurarum confunduntur cum proportionibus homologis plani euclidei tangentis ; dein vero, crescente x, amplitudo arcus supra sphaeram minor est quam supra planum (pro pari x).

Amplitudo maxima habetur cum $x = R \cdot \pi/2$: arcus sphaericus invenitur supra lineam aequatorialem, mediam inter O et O'.

Praeter hanc positionem, crescente x, arcus imminuitur, et fit tandem nullus in O' cum $x = R\pi$.

Si angulus α extenditur ad integrum gyrum (2π), relativus arcus est integer circulus.

Proportiones inter circulum et radium x, intra ambitum satis limitatum circa O, fere confunduntur cum proportionibus geometriae euclideae, seu

$$\bigcirc\, x = 2\pi \cdot x.$$

Crescente vero radio x, apparent discrimina inter geometriam plani et geometriam sphaerae : longitudo circuli (supra sphaeram) est :

$$2\pi \cdot R \cdot \sin\chi \qquad\qquad (x = R \cdot \chi)$$

quae minor est quam longitudo circuli plani, praediti pari radio $R \cdot \chi$, quae est :

$$2\pi R\chi$$

Circulus maximus obtinetur iuxta lineam aequatorialem ; pro qua :

$$x = R\,\frac{\pi}{2}$$

$$\bigcirc\ \text{max.} = 2\pi R \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2\pi R$$

Notamus igitur hunc circulum sphaerae aestimari quidem iuxta formulam euclideam, sed respectu radii R ipsius sphaerae (iacentis extra superficiem sphaericam) et non respectu radii curvi $R \cdot \pi/2$ (pertinentis superficiei sphaericae). Ipse autem radius R constituit tertiam dimensionem (externam superficiei bidimensionali) cuius respectu superficies sphaerica curvatur. Notemus etiam longitudinem aequatoris aestimandam esse — respectu radii R — iuxta formulam euclideam, quia spatium tridimensionale est euclideum, et in ipso linea aequatoris et radius R iacent in eodem plano.

Omnes hae relationes clarae sunt nobis qui perspicimus superficiem sphaericam, planum tangens, tertiam dimensionem. Eaedem vero propositiones ponunt verum aenigma enti rationali bidimensionali, quod moveatur tantum per spatium bidimensionale sphaerae (sit venia fictioni ut dein per analogiam declaretur nostra positio respectu quartae dimensionis).

Mensurae a talibus investigatoribus sumptae intra ambitum proximum puncto O eis suggerunt relationes geometriae planae; dein vero, crescente ambitu experimentorum, colliguntur novae relationes metricae, certo dissonantes cum geometria euclidea. Hae relationes possunt admitti, sine ulteriori indagatione, ut indubia data empirica; possunt nihilominus illi habitantes mundi bidimensionalis inquirere de ratione talium mensurarum; et, quamvis incapaces (sua imaginatione bidimensionali) sibi repraesentandi tertiam dimensionem, superantes limites sensuum, intellectu assurgere possunt ad illam concipiendam. Quod si fit, omnia clarescunt:

radius x, mensuratus supra superficiem sphaericam, relationem analyticam habet cum radio R sphaerae (orthogono mundo bidimensionali) et cum angulo χ, ita ut sit:

$$x = R \cdot \chi \qquad \text{(variante } \chi \text{ inter } 0 \text{ et } \pi)$$
$$x = 2\pi R \cdot \sin \chi \qquad (\text{et non } 2\pi x = 2\pi R\chi)$$

Quod si nostri investigatores bidimensionales haec omnia non intelligunt, excipiunt relationes metricas (geometriae curvae) *ut datum empiricum, de cuius explicatione iam non indagant.*

Eaedem animadversiones possunt analoga ratione instaurari quoad nostras investigationes circa spatium tridimensionale.

Mensurae sumptae intra ambitum limitatum occasionem dederunt ut construeretur geometria euclidea tridimensionalis, quae (per extrapolationem indebitam) initio excepta est ut geometria vera totius spatii. Crescente vero ambitu experimentorum (attingente altiores dimensiones astronomicas) contingere potest ut colligantur relationes metricae contradicentes postulatis geometriae euclideae. Ad superficies sphaericas quod attinet, comparandae veniunt eae duae relationes:

— relatio theoretica geometriae euclideae :

$$\sigma = 4\pi x^2 \qquad (x = \text{radius sphaerae})$$

— relatio empirica :

$$\sigma = 4\pi x'^2 \qquad (x' < x)$$

Si quaerimus proportionem inter duos radios x et x', invenimus illam non esse constantem, sed reproducere (crescente x) illam ipsam proportionem quae stat inter arcum et eius sinum :

$$x : x' = \chi : \sin \chi$$

Licet igitur concipere radios x (qui iam aestimati erant segmenta recta) ut tot arcus sphaericos, qui curvantur (una cum toto spatio tridimensionali) respectu quartae dimensionis, externae mundo tridimensionali, ita ut scribi possit :

— radius per spatium tridimensionale curvum (fig. 55) :

$$x = R \cdot \chi$$

— radius rectus per spatium tetradimensionale :

$$x = R \cdot \sin \chi$$

— superficies sphaerica (iuxta formulam euclideam, sed respectu radii recti spatii tetradimensionalis) :

$$\sigma = 4\pi R^2 \cdot \sin^2 \chi$$

quae formula congruit cum datis empiricis.

Consequenter :

— superficies sphaerica maxima est :

$$\sigma = 4\pi\, R^2 \qquad (\chi = \pi/2 ; \quad \sin \chi = 1)$$

— superficies sphaerica fit nulla cum $x = R$ distantia inter antipodes) :

$$\sigma = 4\pi R^2 \cdot \sin^2\pi = 0 \qquad (\chi = \pi\,;\ \sin\chi = 0)$$

Si de longitudine circuli agitur, scribendum est:

— non iam: $\bigcirc_x = 2\pi R \cdot \chi$ $\qquad (x = R \cdot \chi)$
— sed: $= 2\pi R \cdot \sin\chi$ $\qquad$ (cfr. fig. 55)

Iuxta has ideas spatium tridimensionale — exhibens geometriam ellipticam — concipitur ut paries tridimensionalis hypersphaerae tetradimensionalis: radius R huius hypersphaerae ipse est qui determinat dimensionem fundamentalem geometriae non euclideae tridimensionalis; spatium vero tetradimensionale exhibet characteres euclideos.

Intra regionem limitatam, ipsum spatium tridimensionale exhibet aspectum euclideum, et practice confunditur cum spatio tridimensionali non curvo, tangenti hypersphaerae curvae (sicut habitantes bidimensionales sphaerae aestimaverant suam superficiem perinde ac si esset planum tangens in O sphaeram — cfr. fig. 55).

Quaerimus tandem quid iudicandum sit de hac quarta dimensione, de hypersphaera tetradimensionali et de eius radio R moderante totam geometriam ellipticam spatii tridimensionalis.

Agiturne de mera fictione mathematica, cuius auxilio revocamus mensuras empiricas ad ordinatam synthesim rationalem, aut ei competit etiam nota « rei verae »? (si revera nostrum spatium tridimensionale exhibet relationes metricas geometriae ellipticae).

Estne superanda condicio (tridimensionalis) nostrae imaginationis sensibilis, ita ut intellectu penetremus quartam dimensionem, circa quam curvetur nostrum spatium tridimensionale? aut potius seponendum est id genus investigationum, ut superans vim nostrorum iudiciorum, et tantum considerandae sunt mensurae empiricae exhibentes characterem non euclideum?

De his quaestionibus dein tractabimus, adiciendo expositioni scientificae nonnullas annotationes philosophicas. Nihil tamen prohibet quominus interim, adhibendo coordinatas polares

ad describendas proprietates spatii tridimensionalis elliptici, exprimamus *distantiam* ϱ ab *origine per ipsam dimensionem fundamentalem* R (constantem) *multiplicatam per angulum* χ (variantem inter 0 et π).

Hac annotatione explicite introducta, *elementum lineare spatii elliptici* (cfr. n. 46) *vestem novam exhibet :* pro distantia u ab origine coordinatarum scribendum est $R \cdot \chi$; dein, uniformitatis causa, scribatur θ pro v, et φ pro w); obtinetur sequens expressio :

$$ds^2 = R^2 \{d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\}$$

($R \cdot \chi$ = distantia ab origine ; θ = colatitudo ; φ = longitudo) *quae est ipsa formula qua Einstein expressit proprietates metricas ellipticas universi spatialis tridimensionalis* (cfr. n. 63, a), *illas referendo* — saltem sub aspectu mathematico — *ad hypersphaeram tetradimensionalem euclideam*, praeditam radio R; exhibendo propterea spatium tridimensionale ellipticum tamquam parietem curvam hyperspatii euclidei.

49. Motus spatii euclidei et superficies praeditae curvatura nulla.

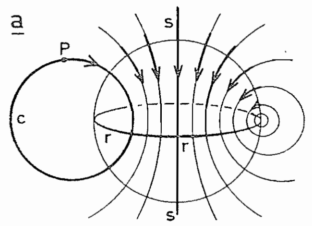
a. Rectae polares.

Per motus totius spatii rectae transferuntur in locum aliarum rectarum, et plana in locum aliorum planorum ; imago igitur talium translationum in nostra repraesentatione spatii elliptici necessario quaerenda est inter « affinitates sphaericas », quae vertunt circulos (imagines rectarum) in alios circulos, et sphaeras (imagines planorum) in alias sphaeras, servando ceteroquin characterem isogonum repraesentationis (cfr. analogam imaginem motuum spatii hyperbolici — n. 44).

Non tamen quaevis affinitates sphaericae aptae sunt ad nostrum finem ; sed tales debent esse quae invariatas relinquant distantias inter quaevis bina puncta quae per affinitatem transferuntur (distantiae autem aestimandae sunt ad normam elementi linearis IV). *Analysis autem huius condicionis in lucem*

fig. 56

a



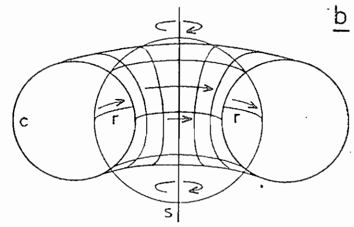
r, s : rectae polares

: rotatio circa r

= translatio iuxta s

P : punctum P percurrit circul. c

b

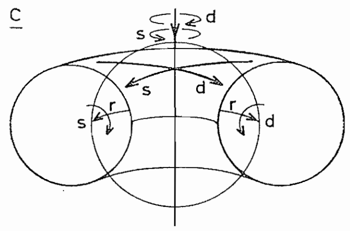


→ : translatio iuxta r

= rotatio circa s

c : circulus c generat cylindrum, cuius imago est "torus"

c

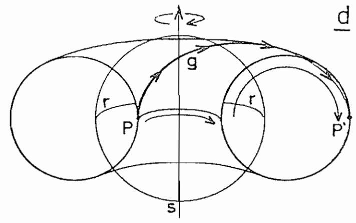


motus helicoidalis :

i.e. : simultanea { translatio iuxta r (s) / rotatio circa r (s) }

traiectoriæ fiunt helicae

d

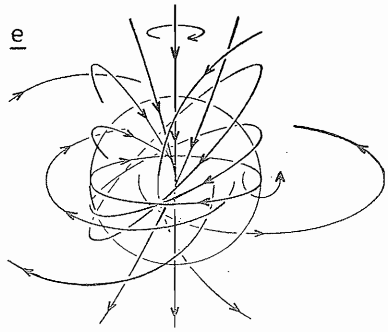


"decursus spatii" :

i.e. : pares fiunt { translatio / rotatio } { motus helicoid. }

traiectoriæ fiunt rectæ

e

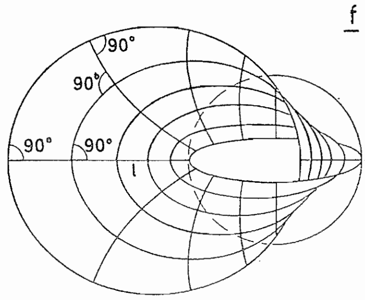


"congruentia rectarum" - i.e.:

∞^2 traiectoriæ, "decurrente" toto spatio.

- utpote rectæ æquidistantes dicuntur "parallelæ" spatii elliptici.

f



∞^1 rectæ congruentes : adnixae ad unam lineam l .

- componunt superficiem præditam curvatura nulla.

fert singularem proprietatem spatii elliptici : affinitas sphaerica relinquere debet « *unitos* » (i. e. : non mutatos in alios) *duos peculiares circulos* (r et s) exhibentes sequentem mutuam relationem : omnes sphaerae, quae secant circulum r iuxta angulum rectum, mutuo se secant iuxta alterum circulum s ; et vicissim. *Quae proprietas spatii repraesentantis renuntiat homologam proprietatem spatii elliptici repraesentati ;* scilicet : *quivis motus* (elementaris) *spatii elliptici* (repraesentatus per definitam affinitatem) *talis est ut duae eius rectae* (r, s) *non mutent suum locum ;* omnia autem plana orthogona rectae r mutuo se secant iuxta alteram rectam s, et vicissim.

Tales binae rectae, quae sunt axes motuum, *dicuntur* « *rectae polares* ». Earum imagines in nostra repraesentatione conformi, necnon earum mutuae positiones, valde perspicuae fiunt si alterutra recta pertinet sphaerae fundamentali (fig. 56).

Haec nota, distinguens motus spatii elliptici, declarari potest per similem notam superficiei sphaericae rotantis supra seipsam : in his rotationibus servant suum locum duo poli (circa quos fit rotatio) et linea aequatorialis (media inter duos polos) quae transvehitur supra seipsam ; mutua autem positio polorum et aequatoris talis est ut omnes circuli maximi orthogoni aequatori mutuo se secent in polis. Si vero agitur de spatio elliptico (quod etiam « sphaericum » dici potest), tertia dimensio addenda est : pro polis punctiformibus stat integra linea « polaris » ; et duae lineae polares exhibent similem mutuam positionem ac poli et linea aequatorialis supra sphaeram ; praeterea, sicut supra sphaeram rotatio circa polos est simul translatio iuxta aequatorem, ita rotatio spatii elliptici circa alteram rectam polarem est simul translatio eiusdem spatii iuxta alteram rectam (quam proprietatem sequens paragraphus magis explicat).

b. Motus translationis et rotationis et superficies cylindricae.

Consideretur in primis motus quo spatium ellipticum transvehitur per seipsum iuxta directionem rectae r (fig. 56, b) : *haec translatio necessario nectitur cum rotatione circa rectam polarem* s.

Amplitudo utriusque motus exprimi potest per angulos : quod manifestum est quoad rotationem circa axem s ; sed affirmandum etiam est de translatione iuxta rectam r : recta enim (seu potius « pseudo-recta ») clauditur in circulum.

Notemus etiam duos motus ita necti inter se ut translatio iuxta rectam r mensuretur eodem angulo ac rotatio circa rectam polarem s ; et vicissim.

His motibus generantur superficies cylindricae.

Consideretur enim in primis punctum P rotans (simul cum toto spatio) circa rectam r (quae supponatur iacere supra sphaeram fundamentalem ut res simpliciori ratione repraesentetur : fig. 56, a) ; P percurrit traiectoriam circularem c, aequidistantem ab r, cuius imago est etiam circulus, qui secat iuxta angulum rectum fascem radiorum, cuius vertex stat supra r, et qui est orthogonus eidem axi rotationis. Accedat denique translatio spatii iuxta directionem r (quae est simul rotatio circa rectam polarem s) : circulus c describit nunc superficiem cylindricam, aequidistantem ab axe r ; eius autem imago est « torus »(fig. 56, b).

Ipsa ratio qua superficies generata est manifestat eius characterem euclideum : potest enim transferri supra seipsam iuxta duas directiones orthogonas ita ut eius puncta percurrant duo systemata traiectoriarum orthogona inter se. Hae duae series traiectoriarum repraesentantur per circulos (fig. 56, b), qui constituunt duas ex quatuor seriebus circulorum tori.

Illae ipsae traiectoriae circulares sunt etiam lineae geodeticae superficiei cylindricae (quae proprietas ceteroquin necessario stat quoties habentur duo systemata orthogona linearum aequidistantium) ; figura 56, b manifestat hanc proprietatem : exhibet enim utramque seriem traiectoriarum ut intersectiones cylindri cum planis orthogonis eidem superficiei.

c. Motus helicoidales et « decursus » totius spatii iuxta systema rectarum aequidistantium.

Si simul componuntur translatio iuxta directionem r et rotatio circa eandem rectam r, obtinetur motus helicoidalis. Idem motus exhiberi potest ut summa duarum translationum

simultanearum iuxta duas rectas polares (vel ut summa duarum rotationum circa duos axes polares).

Per hos motus helicoidales circulus c generat eandem superficiem cylindricam de qua iam dictum est (fig. 56, c).

Inter varios motus helicoidales unus distinguitur ob singulares proprietates : ille est qui producitur cum duo motus componentes, translationis et rotationis, sunt eiusdem amplitudinis ; tunc omnia puncta spatii percurrunt traiectorias rectas (« rectas » vero spatii elliptici, seu geodeticas clausas in seipsas).

Haec praerogativa facile apparet si amplitudines translationis et rotationis (constanter pares inter se) attingunt duos rectos : tunc enim (v. fig. 56, d) quodvis punctum P transfertur in punctum antipodum P' ; traiectoriae igitur constant binis punctis antipodibus : sunt scilicet rectae spatii elliptici.

Hae ipsae rectae, utpote traiectoriae simultaneae motus rigidi, sunt etiam lineae inter se aequidistantes ; qua de causa dicuntur « rectae parallelae » spatii elliptici ; quae discrepant a parallelis euclideis quia, etsi aequidistantes, non iacent in eodem plano (ut ipse motus helicoidalis postulat et illustrat).

Tale systema rectarum aequidistantium denominatur « congruentia rectarum » ; nomine proprio designatur etiam peculiaris motus helicoidalis gignens « congruentiam rectarum » : denominabitur a nobis « decursus » spatii elliptici.

d. Superficies praeditae curvatura nulla.

1. Generalior typus talium superficierum.

Intra systema (dupliciter infinitum) *rectarum congruentium,* infinitis in modis componi possunt superficies praeditae curvatura nulla : sufficit ut inter omnes rectas congruentiae (quae replent volumen tridimensionale) *eligatur ea series* (simpliciter infinita) *quae innititur uni lineae continuae* (fig. 56, f).

Tales superficies sunt certo euclideae, quia constitutae rectis aequidistantibus.

Quare supra ipsas describi etiam possunt duo systemata

orthogona linearum aequidistantium : constituunt prius systema eaedem rectae $u, u', u'' \ldots$ congruentiae ; alterum autem constituunt linea v (orthogona rectis congruentiae) et subsequentes positiones $v', v'' \ldots$, quas ipsa linea v acquirit dum superficies decurrit supra seipsam iuxta dictam congruentiam ; per hunc enim motum, omnia et singula puncta lineae v transvehuntur per rectas congruentiae, simul percurrendo pares tractus ; quare variae lineae $v, v', v'' \ldots$ et manent constanter orthogonae rectis $u, u', u'' \ldots$ et sunt etiam aequidistantes inter se.

Consequens etiam est ut superficies possit novo modo transferri supra seipsam ita ut eius puncta simul percurrant lineas aequidistantes $v, v', v'' \ldots$; qua translatione rectae $u, u', u'' \ldots$ congruentiae mutant inter se suum locum.

2. Superficies Clifford's.

Hae superficies, nomine mathematici Clifford designatae, constituunt casum peculiarem generalioris typi iam descripti ; distinguuntur autem utpote superficies quoquoversus clausae in seipsas : non solum scilicet iuxta directionem rectarum congruentium (omnes enim rectae spatii elliptici clauduntur in seipsas), sed etiam in directionem transversalem, quia componunt has superficies eae rectae congruentes, quae innituntur uni rectae transversali (quae etiam clauditur in seipsam).

Analysis harum condicionum ostendit superficies Clifford's non differre a superficiebus cylindricis de quibus iam dictum est (cfr. n. 49, b) ; *eas vero exhibet sub novo aspectu, manifestando novas proprietates.*

En praecipuae proprietates notandae, quae ex dictis obvie colliguntur et figura 57 iam satis illustrantur :

— *Duae series rectarum congruentium distinguuntur supra superficies cylindricas :* sunt ipsae traiectoriae quas percurrunt puncta unius sectionis orthogonae cylindri quae moveatur « decursu » dextrorso aut sinistrorso.

Rectae uniuscuiusque systematis innituntur rectis alterius systematis.

— *Rectae duorum systematum mutuo se secant iuxta unum definitum angulum* φ.*

Dum enim superficies decurrit supra seipsam iuxta alteram e duabus congruentiis, rectae alterius congruentiae commutant inter se suum locum (eorum puncta enim simul percurrunt tractus aequales, se transferendo in locum aequidistantem).

Amplitudo autem anguli φ duplicat amplitudinem (angularem) radii r sectionis orthogonae cylindri** :

$$\varphi = 2\frac{r}{R}$$

quare, si $r = R \cdot \pi/4$ (i. e. : superficies cylindrica pariter distat a duobus axibus polaribus) angulus φ est rectus. Fit vero nullus si $r = 0$ (tunc enim binae helicae dextrorsae et sinistrorsae in unam rectam coincidunt, quae est ipse axis cylindri) ; fit vero π cum $r = R \cdot \pi/2$ (tunc duae lineae helicoidales coincidunt — sed iuxta directionem contrariam — cum recta polare axis cylindri).

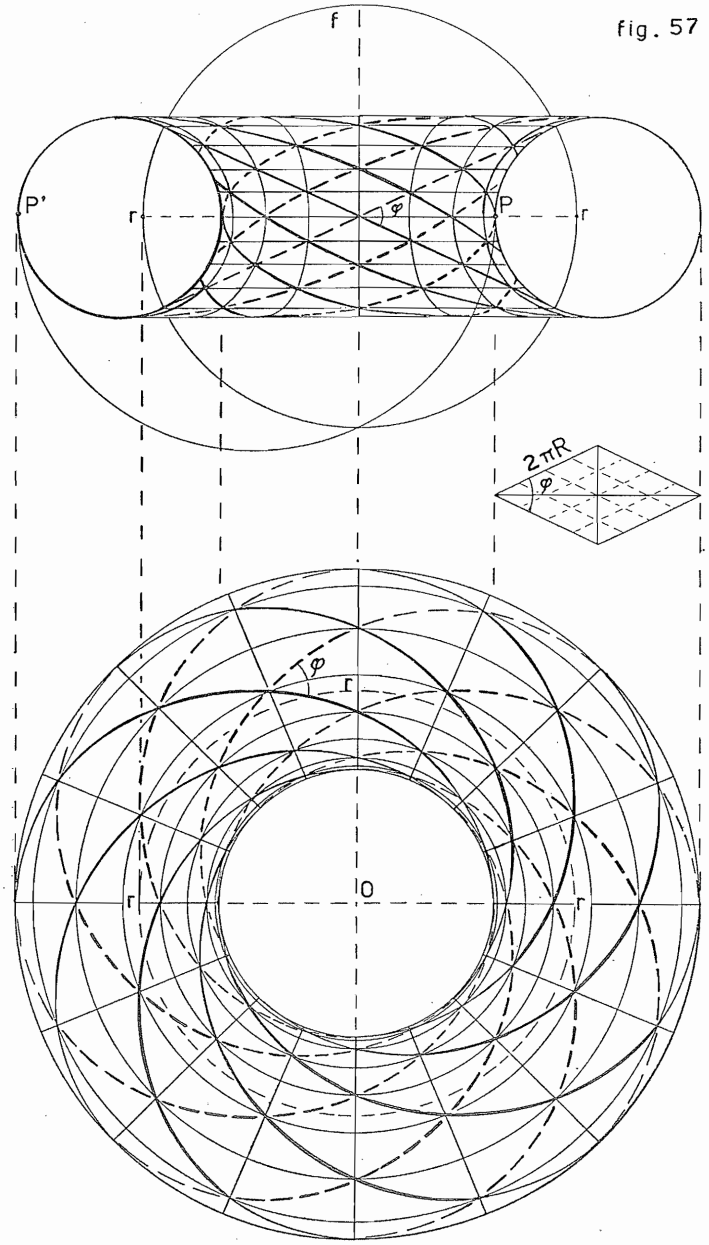
— *Duae rectae parallelae — altera dextrorsa, altera sinistrorsa — deduci possunt, per quodvis punctum* P, *cuivis rectae* assignatae.

Etenim : ut iam notatum est, omnes rectae unius congruentiae dicuntur parallelae inter se, utpote rectae aequidistantes ; pari igitur de causa, sunt rectae parallelae etiam axis cylindri et quaevis recta descripta supra cylindrum ; per

* Lineae bisectrices anguli φ et eius anguli supplementaris π-φ (iacentes supra ipsam superficiem cylindricam) sunt lineae generatrices cylindri et eius sectiones rectae circulares ; ipsae lineae repraesentantur (fig. 57) per duas ex quatuor seriebus circulorum quae describi possunt supra torum (vel supra cyclidem Dupin) ; aliae duae series circulorum earundem superficierum repraesentant duas series (dextrorsam et sinistrorsam) rectarum parallelarum. Hae quatuor series linearum constituunt etiam quatuor series traiectoriarum, quas percurrunt puncta superficiei cylindricae cum cylinder ipse : *a*) tantum transfertur iuxta directionem axis ; *b*) tantum rotatur circa eundem axem ; *c*, *d*) movetur motu helicoidali, decursu dextrorso et sinistrorso.

** Duabus enim rotationibus oppositis — altera dextrorsa, altera sinistrorsa : utraque vero pari angulo φ — duo latera anguli φ feruntur in positionem mediam rectae bisectricis.

fig. 57



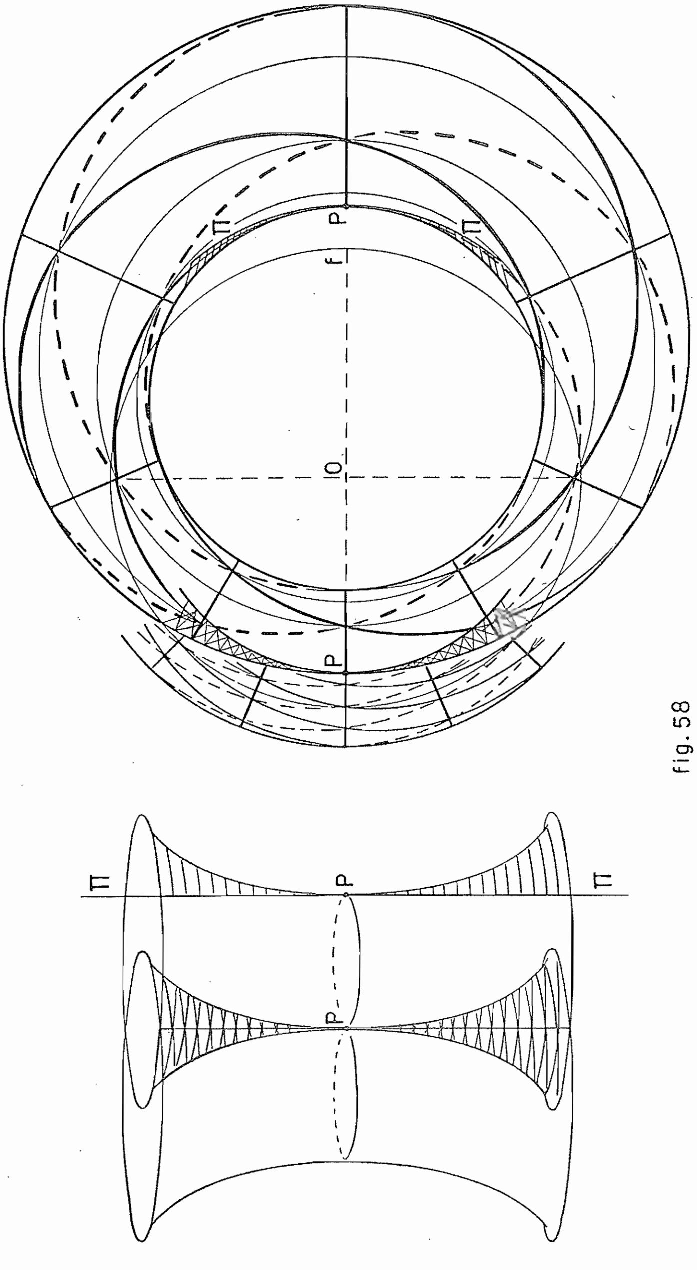


fig. 58

quodvis autem punctum superficiei cylindricae transeunt duae rectae huiusmodi, quarum altera pertinet congruentiae dextrorsae, altera congruentiae sinistrorsae.

— *Datur in spatio elliptico volumen cylindricum maximum, nulla superficie circumscriptum.*

Superficies cylindricae sequuntur analogas vicissitudines ac superficies sphaericae (cfr. n. 47): crescente radio, superficies initio crescunt, sed usque ad definitam extensionem maximam ; crescente adhuc radio, superficies decrescit, et tandem fit nulla.

Si de superficie sphaerica agitur, extremus limes inextensus est punctum antipodum centri sphaerae ; si vero de cylindris agitur, extremus limes inextensus est recta s polaris axis r cylindri. Qui limes attingitur cum radius cylindri factus est $R \cdot \pi/2$: tunc enim omnes parallelae axi, tum dextrorsae tum sinistrorsae (quibus intexitur superficies cylindrica), coincidunt cum recta polari eiusdem axis.

In his adiunctis volumen cylindricum factum est maximum quia extenditur ad totum spatium ; quod si nulla superficie circumscribitur, hoc ideo contingit quia spatium ellipticum clauditur in seipsum. Sub novo igitur aspectu illustratur peculiaris proprietas configurationis spatii elliptici.

Notandum.

Per spatium ellipticum superficies praeditae curvatura nulla possunt ita evolvi et disponi sicut nullo pacto possunt in spatio euclideo, quacumque ratione flectantur.

Considerentur duae superficies cylindricae (seu quadricae Clifford's) iuxtapositae ut ostendit figura 58 : ita flectuntur ut iuxta duas sectiones (longitudinales) mutuo sibi appropinquent, dum iuxta alias sectiones orthogonas (transversales) recedunt ab invicem. Quem duplicem oppositam flexionem nullo modo obtinent in spatio euclideo eaedem superficies praeditae curvatura nulla : sed id genus flexionis competit (in spatio euclideo) solis superficiebus praeditis curvatura negativa.

50. Repraesentatio conformis spatii euclidei in seipso.

Absolvit seriem repraesentationum conformium variorum spatiorum repraesentatio spatii euclidei in seipso. Quae etiam utiliter consideratur ut pateat relationes metricas euclideas obtineri posse etiam per peculiarem regulam metricam deformantem extensiones, vel — quod ad idem redit — per mensuras sumptas unitatibus non rigidis.

Agitur de repraesentatione tridimensionali omnino analoga repraesentationi bidimensionali, de qua iam actum est (cfr. n. 11) ; nonnisi pauca propterea addemus.

Elementum lineare (quod iam non indiget ulteriore declaratione) est :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Punctum centrale O $(x = 0\,;\ y = 0)$ est imago, infinite contracta, omnium punctorum infinite distantium ; per ipsum igitur transeunt imagines omnium rectarum et omnium planorum, quae constituunt tot fasces circulorum et sphaerarum transeuntium per O.

Consideretur nominatim sphaera, transiens per O, *imago plani euclidei ;* rectae eiusdem plani repraesentantur per tot series circulorum iacentium supra eandem sphaeram et transeuntium per eandem originem O ; obtinetur igitur eadem repraesentatio plani euclidei supra sphaeram, quae inde ab initio exhibita est ut illustraretur quo pacto superficies, praedita (pro sua naturali extensione et configuratione) determinata curvatura, repraesentare posset supra seipsam superficiem diversae curvaturae (cfr. n. 29, fig. 28).

Notemus denique hanc repraesentationem plani euclidei supra sphaeram plane congruere cum imagine orisphaerae (cui competit curvatura nulla sicut plano euclideo) *in repraesentatione conformi spatii hyperbolici* (cfr. n. 40, fig. 45, c ; n. 45, fig. 52).

51. Repraesentationes spatiorum non euclideorum iuxta methodos geometriae proiectivae.

a. Generaliora lineamenta.

1. Repraesentatio spatii hyperbolici.

Haec imago spatii hyperbolici tota continetur intra ellipsoidem (vel etiam intra sphaeram) sicut analoga repraesentatio plani hyperbolici contenta intra ellipsem (vel circulum).

Regula metrica manet eadem ac in repraesentatione plani bidimensionalis (cfr. n. 38), ita ut puncta ellipsoidis repraesentent puncta infinite distantia spatii hyperbolici.

Rectae (infinitae) spatii hyperbolici repraesentantur per segmenta recta comprehensa intra ellipsoidem ; distinguuntur propterea duo puncta infinite distantia, quae conspiciuntur (a puncto externo rectae) iuxta duas diversas directiones ; quare ipsis respondent binae distinctae parallelae geometriae hyperbolicae.

Similiter plana hyperbolica repraesentantur per portiones planorum euclideorum internas eidem ellipsoidi.

Stellae propriae, impropriae et ideales repraesentantur per stellas rectarum et planorum, quae aut conveniunt in puncto interno ellipsoidi, aut conveniunt in puncto eiusdem ellipsoidi, aut sunt orthogona uni plano (anguli autem recti aestimandi sunt iuxta eandem regulam descriptam in repraesentatione bidimensionali).

Variae sphaerae (propriae, impropriae, ideales) repraesentantur per superficies (generatim ellipsoides) secantes iuxta angulum rectum relativas stellas.

2. Repraesentatio spatii elliptici.

Haec repraesentatio extendit ad totum spatium tridimensionale euclideum ipsam repraesentationem bidimensionalem plani elliptici, de qua iam actum est (cfr. n. 31, fig. 31).

Repraesentatur autem hac ratione spatium ellipticum simplex : excludens scilicet antipodes. Puncta infinite distan-

tia unius eiusdemque rectae censenda sunt imago duplicata unius eiusdemque puncti. Hae condiciones referunt peculiares proprietates configurationis spatii elliptici.

Regula metrica (eadem ac in casu bidimensionali — cfr. n. 31) tribuit toti rectae euclideae mensuram πR ($R =$ dimensio fundamentalis spatii non euclidei.

b. Motus spatiorum et entia geometrica « absoluta » moderantia metricas proiectivas.

Motus spatiorum non euclideorum (in seipsis consideratis) consistunt, ut quivis motus geometricus, in transformationibus transferentibus rectas in locum aliarum rectarum, et plana in locum aliorum planorum, servando vero invariatas mutuas distantias inter omnia puncta.

Imagines igitur talium motuum consistunt in transformationibus proiectivis (v. Append. II), quibus rectae transferuntur in alias rectas, et plana in alia plana ; ita tamen ut (pro peculiari regula metrica adhibenda) invariatae maneant mutuae distantiae punctorum.

De regulis metricis propriis geometriae proiectivae latius dicetur in appendice ; notemus hic breviter geometriam proiectivam proprie non considerare extensionem figurarum ; considerat enim ea (ut iuxtapositionem figurarum) quae non variantur per varias operationes proiectionis et sectionis ; extensiones vero (tum lineares, tum arearum, tum angulorum) per has operationes alterantur. Nihilominus dantur peculiares proportiones (non simplices, sed duplices : seu proportiones inter proportiones) quae per operationes proiectivas invariatae manent ; quare hae proportiones invariantes sunt obiectum metricae proiectivae.

Hae proportiones semper relationem habent ad quoddam « absolutum », quod per operationes proiectivas invariatum manet (seu mutatur in seipsum). Ex. gr., si agitur de repraesentatione spatii hyperbolici intra ellipsoidem (imaginem punctorum infinite distantium), « absolutum » constituitur per hanc ipsam superficiem limitem, et mensurae (proiectivae) referunt extensiones finitas inter puncta propria ad peculiaria

puncta eiusdem absoluti (cfr. n. 38). Si agitur de repraesentatione spatii elliptici, « absolutum » exprimitur per entia analytica imaginaria.

« Absoluta » igitur harum repraesentationum par munus absolvunt ac entia geometrica (ex. gr.: planum $z > 0$ aut sphaera) quae limitant repraesentationem conformem spatii hyperbolici; quae etiam non variantur per affinitates sphaericas exprimentes motus eiusdem spatii (cfr. n. 44). Quare idem nomen « absoluti » tribuitur etiam istis entibus geometricis fundamentalibus repraesentationum conformium.

Notanda autem est ordinata ratio qua — pro varia natura « absoluti » geometriae proiectivae — colliguntur relationes metricae geometriae ellipticae, euclideae et hyperbolicae. Quare methodi propriae geometriae proiectivae perspicue exhibent varias geometrias (euclideas et non euclideas) *ut respondentes variis rationibus quibus statuuntur regulae metricae* (v. Append. II — n. 53).

Appendix I

52. De geometria Riemanniana.

Riemann (m. 1866) *notaverat rationem minus idoneam qua posita erant fundamenta geometriae classicae euclideae:* eius prima principia introducuntur partim ut axiomata « a priori », partim ut postulata, et nulla investigatio instituitur de iudiciis in ipsis contentis, de eorum mutua dependentia, de possibilitate ut simul stent.

Quare hic auctor, anno 1854 (ignarus operum Gauss, Lobačewski, Bolyai) *proposuit nova criteria ad fundandam geometriam* (*Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* — Lectio ad obtinendam « liberam docentiam », coram Gauss. Editio posthuma, a. 1868).

Riemann secutus est methodum differentialem, quam iam Gauss adhibuerat ad describendam geometriam intrinsecam super-

ficierum ; sine limitatione vero suas positiones applicavit cuivis spatio, seu « varietati », praedito n dimensionum. Pro tali spatio, vel « varietate », intelligitur collectio quaedam (continua) elementorum, quorum unumquodque definitur n numeris $(x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n)$; qui numeri (« coordinatae elementorum ») variantur modo continuo intra certum ambitum. Huiusmodi varietas introducitur propterea ut ens analyticum, « spatium functionale » ; et sine ulla difficultate et disquisitione admittuntur quaevis n dimensiones.

Spatium riemannianum consideratur adhuc ut informe usquedum non introducitur regula metrica ad aestimandam separationem (« distantiam » scilicet, sub aspectu geometrico entis extensi) inter duo elementa systematis.

Postulavit autem Riemann ut elemento metrico infinitesimo competeret forma differentialis quadratica :

$$ds^2 = \Sigma\, a_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

in qua formula coëfficientes a_{ik} sunt tot functiones variabilium x_i (univocae, continuae, et quae derivari possint quantum requiritur).

Tale elementum lineare ds (exprimens distantiam inter duo elementa x et $x + dx$) *invariatum manere debet quantumvis varientur coordinatae* x_i elementorum, si pro ipsis ponuntur novae functiones x_i', quae sint functiones priorum variabilium x_i (requiruntur autem functiones univocae, quae derivari possint, et quae univoce inverti possint). Postulatur etiam forma « definita » semper positiva, et numquam nulla nisi nulla sint omnia incrementa infinitesima dx_i (ut vitentur distantiae nullae inter duo distincta elementa varietatis — quae condicio non retinetur in elemento metrico chronotopi relativitatis).

Postulando has condiciones Riemann congruenter extendit ad spatia pluridimensionalia quae continentur in geometria Gaussiana de superficiebus ; sed neque requirenda est demonstratio formae riemannianae elementi linearis : agitur de conventione.

Varietas analytica V_n (praedita n dimensionum) dicitur « spatium riemannianum » ; geometria autem riemanniana est geometria intrinseca huius spatii : perpendit scilicet proprietates quae invariatae permanent quantumvis mutentur systemata coordinatarum (ut supra dictum est) ; quae proprietates pariter competunt etiam aliis spatiis, quae — sine deformatione suarum distantiarum — illi applicari possint (cfr. analogas proprietates et condiciones geometriae intrinsecae superficierum a Gauss elaboratae).

Statuuntur hac ratione infinitae geometriae diversae pro diversa ratione qua definiuntur coëfficientes a_{ik} *elementi linearis.* Obtinetur consueta geometria euclidea tridimensionalis quoties in varietate V_3 statui possunt tales coordinatae, quarum respectu omnes coëfficientes a_{ik} aequent unitatem et obtinetur :

$$ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2$$

Si per nullam transformationem coordinatarum obtineri potest expressio euclidea elementi linearis, spatium dicendum est curvum.

Curvatura spatii referenda est ad curvaturam eius superficierum geodeticarum. Consideranda est, inter omnes geodeticas egredientes in omnes directiones ex quodam puncto P, illa collectio geodeticarum (simpliciter infinita : ∞^1) componens fascem directionum, quae — in illo puncto P — pariter iacent (non desunt regulae analyticae ad talem fascem definiendum) ; hic fascis geodeticarum componit « superficiem geodeticam » varietatis ; ei competit (congruenter cum elemento lineari totius varietatis) definitum elementum lineare, ex quo deducitur (per definitos calculos) curvatura eiusdem superficiei in dicto puncto P : quae curvatura exprimit etiam curvaturam spatii in illo ipso puncto P et secundum positionem illius superficiei geodeticae. In eodem puncto P dari possunt diversae curvaturae spatii pro diversa ratione qua iacet superficies geodetica transiens per P. A fortiori curvatura potest esse diversa pro diversis punctis spatii.

Inter omnes varietates possibiles dantur etiam spatia praedita curvatura constanti. Demonstratum autem est curvaturam necessario manere constantem per totum spatium, si — vel in uno eius puncto — curvatura invariata permanet quantumvis varietur positio superficiei geodeticae transeuntis per illud punctum. In his adiunctis proprietates geometricae spatii dicuntur « isotropae », seu aequales in omnes directiones ; quare si spatium est isotropum vel in uno puncto, ipsum est etiam ubique homogeneum.

Stante isotropia et homogeneitate spatii, haberi possunt spatia exhibentia curvaturam constantem positivam, nullam aut negativam ; quae spatia exhibent proprietates analogas quam — in ordine bidimensionali — sphaerae, plana (euclidea), pseudosphaerae.

Riemann probavit statui posse in spatio isotropo et homogeneo tales coordinatas x_i *quarum respectu elementum lineare obtineat sequentem formam :*

$$ds^2 = \frac{\sum dx_i^2}{\left(1 + \frac{K}{4} \sum x_i^2\right)^2} \qquad (K = \text{curvatura})$$

Si $K = 0$ (spatium euclideum) elementum lineare reducitur ad consuetam formam euclideam.

Appendix II

53. De geometria proiectiva et de variis typis geometriarum.

Geometria proiectiva studet illis characteribus graphicis entium geometricorum, qui invariati permanent dum figurae subiciuntur operationibus quae « proiectivae » dicuntur ; quae operationes sunt : a) *proiectiones* figurarum ex quodam centro O (proiectio autem fit per fascem aut stellam radiorum et pla-

norum cuius vertex est O) ; b) *sectiones* fascis aut stellae proiectantis.

Distinguuntur in hoc studio « formae fundamentales », quae sunt :

— *recta :* ut forma substentans infinita sua puncta ;
— *planum :* ut forma substentans puncta et rectas ;
— *spatium :* ut forma substentans puncta, rectas et plana.

Hae formae sunt figurae proiciendae. In plano distingui etiam possunt fasces rectarum ; in spatio autem fasces et stellae rectarum, necnon fasces et stellae planorum.

Figurae proicientes sunt :

— *fascis rectarum :* proiciens ab uno centro puncta rectarum ;
— *fascis planorum :* proiciens ab uno axe puncta cuiusdam rectae ;
— *stella rectarum :* proiciens ab uno centro puncta cuiusdam plani ;
— *stella planorum :* proiciens ab uno centro rectas cuiusdam plani.

Ipsae formae fundamentales distinguuntur etiam in formas primae, secundae et tertiae speciei pro diverso numero coordinatarum quae requiruntur ut determinentur singula elementa formae.

— *Formae primae speciei* sunt : recta et fasces rectarum et planorum proicientes puncta rectae.
— *Formae secundae speciei :* planum et stellae (rectarum et planorum) proicientes puncta et rectas plani.
— *Formae tertiae speciei :* Spatium punctorum et spatium planorum.

Relatio proiectiva stat inter duas formas cum altera ex altera derivatur per operationes proiectionis et sectionis ; hae formae dicuntur homographicae.

Fundamentum cuiuslibet homographiae inter formas cuiuslibet speciei est relatio proiectiva inter formas primae speciei : habentur enim relationes proiectivae inter formas superiores

si (et tantum si) relationes proiectivae stant inter formas inferioris ordinis quas illae continent.

Conditio autem necessaria et sufficiens ut relatio proiectiva stet inter duas formas primae speciei est ut eadem sit quaedam peculiaris duplex proportio inter quatuor elementa prioris formae ad libitum eligenda et inter quatuor elementa homologa alterius formae.

Si forma primae speciei est linea recta, quatuor eius elementa constituentia duplicem illam proportionem sunt quatuor puncta $M\ N\ A\ B$ eiusdem rectae ; duplex autem proportio statuitur iuxta regulam iam expositam (cfr. n. 38) ; ipsa symbolice scribitur :

$$(M\ N\ A\ B)$$

in qua scriptura ordo litterarum dicit ordinem quo considerandae sunt variae proportiones simplices inter distantias interpositas inter dicta puncta, ut tandem conficiatur proportio duplex :

$$\frac{MA \mid NA}{MB \mid NB}$$

Si forma primae speciei est fascis rectarum, considerandi sunt anguli quos efformant quatuor rectae fascis $m\ n\ a\ b$; duplex autem proportio statuenda est inter sinus eorundem angulorum ; scilicet :

$$\frac{\sin ma}{\sin na} : \frac{\sin mb}{\sin nb}$$

quae duplex proportio symbolice scribitur :

$$(m\ n\ a\ b)$$

Iamvero, ut facile probatur, quoties rectae $m\ n\ a\ b$ proiciunt puncta $M\ N\ A\ B$, stat sequens aequalitas :

$$(M\ N\ A\ B) = (m\ n\ a\ b)$$

Comprobatus igitur restat character proiectivus illius duplicis proportionis : haec enim non variatur si quatuor puncta $M\ N\ A\ B$ eiusdem rectae proiciantur a quolibet centro O per rectas $m\ n\ a\ b$ (egredientia ex O) et dein fascis $m\ n\ a\ b$ utcumque secetur (v. n. 38, fig. 42).

Notentur variae condiciones sub quibus relatio proiectiva statui potest inter duas formas primae speciei :

— duae formae primae speciei possunt semper ita referri ad invicem per aptas proiectiones et sectiones ut tribus elementis $A\ B\ C$ ad libitum assignatis prioris formae respondeant tria elementa $A'\ B'\ C'$ alterius formae etiam ad libitum assignata ;

— si tantum assignantur bina elementa homologa ($A\ B$ et $A'\ B'$) infinitae relationes homographicae statui possunt ;

— consequenter : *relationes homographicae inter duas formas primae speciei possunt ita statui* (et quidem infinitis in modis) *ut bina elementa correlativa duarum formarum invariatam servent suam mutuam positionem :* distantiam scilicet punctorum aut angulum rectarum (cfr. fig. 42). *Haec elementa dicuntur « elementa unita » homographiae ;*

— nonnisi bina elementa unita dari possunt ; si enim accedit tertium elementum unitum, homographia reducitur ad identitatem formarum.

Proprietates expositae sinunt ut introducatur etiam peculiaris metrica proiectiva.

Geometria proiectiva, pro sua indole, neglexit initio mensuras formarum (in primis segmentorum et angulorum) : hae enim extensiones mutantur per operationes proiectivas. Nihilominus character proiectivus invarians competit omni duplici proportioni ; et homographiae in infinitis modis statui possunt, unitis servatis duobus elementis eiusdem proportionis ; quare tandem, *semel statutis punctis unitis homographiae* (*quae dicuntur « elementa absoluta »*), *quibusvis aliis binis elementis formae respondet una definita duplex proportio ;* quare etiam : semel statuto systemate « absoluto » (cui omnis duplex proportio refertur), unicuique segmento $A\ B$ (vel angulo $a\ b$) respondet definita duplex proportio quae numquam variatur

quantumvis segmentum illud (vel angulus) subiciatur operationibus proiectionis et sectionis.

Talis igitur duplex proportio — praedita charactere proiectivo — assumitur ut « mensura proiectiva » segmentorum et angulorum. Parem mensuram obtinent omnia segmenta (anguli) quae possunt per operationes proiectivas superponi et in unum congruere. Vicissim, si duo segmenta nequeunt per operationes proiectivas coincidere in unum, necessario sibi vindicant mensuram proiectivam diversam.

*Variantur autem mensurae proiectivae determinati elementi si variatur « absolutum » cui ipsae mensurae innituntur ; colliguntur etiam tria diversa genera systematum metricorum pro tribus diversis generibus absolutorum, quae statui possunt ; et hae tres distinctae metricae proiectivae congruunt cum metrica hyperbolica, parabolica (euclidea), elliptica.**

Metrica hyperbolica obtinetur cum absolutum constituitur duobus elementis realibus et distinctis (cfr. n. 38, figg. 41, 42).

Metrica elliptica obtinetur cum absolutum constituitur duobus punctis imaginariis coniugatis (cfr. n. 31).

Metrica euclidea, media inter metricam hyperbolicam et ellipticam, obtinetur ut casus limes ad quem tendunt tum metrica hyperbolica tum metrica elliptica cum duo puncta distincta absoluti (sive realia sive imaginaria coniugata) tendunt in unum punctum reale.

Si attendimus ad formulas quibus exprimuntur distantiae (proiectivae) inter duo puncta, *notamus tum formulas hyperbolicas tum formulas ellipticas transformari in formulas euclideas quatenus fit infinita dimensio fundamentalis k in illis contenta* (cfr. nn. 31, 38).

---

* Cum exponuntur principia et methodi geometriae proiectivae supponi solet et applicari proprietas euclidea rectarum parallelarum ; quod tamen fit simplicitatis causa, sed non est necessarium ; possunt vero bases geometriae proiectivae poni sine ulla hypothesi (euclidea aut non euclidea) circa rectas parallelas. Quare, cum evolutio geometriae proiectivae ducit ad tres possibiles regulas metricas (hyperbolicam, parabolicam, ellipticam), hae pari iure simul introducuntur, et geometriae proiectivae non euclideae non se exhibent ut meras interpretationes spatiorum non euclideorum in spatio euclideo (ut repraesentationes conformes), sed directe constituunt spatia non euclidea.

Sub alio aspectu apparet positio media geometriae euclideae: metrica proiectiva hyperbolica dici potest aestimare extensiones unitate mensurae quae in indefinitum contrahitur dum segmenta mensuranda discedunt a quadam apta origine (cfr. n. 38, fig. 42); metrica elliptica ex contrario adhibet unitatem mensurae quae in indefinitum dilatatur dum recedunt ab origine segmenta mensuranda (cfr. n. 31, figg. 31, 32); *geometria euclidea dici potest mensurare extensiones unitatibus rigidis* (seu sub aspectu mere extensivo).

Quae dicta sunt de metricis proiectivis formae primae speciei pariter stant si agitur de formis secundae et tertiae speciei.

Pro formis secundae speciei:

— metrica hyperbolica obtinetur cum fundamentum « absolutum » est conica realis; consideratur nominatim conica elliptica (cfr. n. 38);

— metrica elliptica obtinetur cum absolutum constituitur conica imaginaria;

— metrica parabolica (euclidea) obtinetur cum absolutum est conica quae dicitur « degeneris »: reducitur ad lineam rectam (sicut sectio coni cum planum secans fit tangens lineam generatricem coni).

Pro formis tertiae speciei:

— metrica hyperbolica: fundamentum constituitur superficie « quadrica » reali: ne extent rectae reales quarum longitudo computetur ut nulla, quidam typi inter quadricas excludendi sunt; sicut pro plano fundamentum positum est in ellipsi, ita pro spatio fundamentum ponitur in ellipsoide (cfr. n. 51).

— metrica elliptica: absolutum constituitur quadrica imaginaria. Tale spatium ellipticum extenditur in infinitum, sed — pro metrica statuta — eius extensio non aestimatur infinita (cfr. n. 51).

— metrica parabolica: fundamentum constituitur quadrica degenere.

54. Formulae Comparatae Geometriarum

Ellipticae	**Euclideae**	**Hyperbolicae**
	Longitudo circuli	
$2\pi R \sin \frac{r}{R}$	$2\pi r$	$2\pi R \,\mathrm{Sh} \frac{r}{R}$
	Area circuli	
$4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{2R}$	πr^2	$4\pi R^2 \,\mathrm{Sh}^2 \frac{r}{2R}$
	Sperficies sphaerae	
$4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$	$4\pi r^2$	$4\pi R^2 \,\mathrm{Sh}^2 \frac{r}{R}$
	Excessus geodeticus semisphaerae	
2π	2π	2π
	Curvatura sphaerae	
$\dfrac{1}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}}$	$\dfrac{1}{r^2}$	$\dfrac{1}{R^2 \,\mathrm{Sh}^2 \frac{r}{R}}$
	Radii sphaerarum (pro pari curvatura sphaerarum)	
$r_{ellipt.}$ $>$	$r_{euclid.}$ $>$	$r_{hyperb.}$
	Volumen sphaerae	
$\pi R^3 \left(\frac{2r}{R} - \sin \frac{2r}{R} \right)$	$\frac{4}{3} \pi r^3$	$\pi R^3 \left(\mathrm{Sh} \frac{2r}{R} - \frac{2r}{R} \right)$

PARS III

De spatiis non euclideis in seipsis consideratis

55. Praeambulum.

Repraesentationes graphicae, quae in praecedenti capite expositae sunt, ante oculos nobis posuerunt varias proprietates, tum metricas tum topologicas, spatiorum non euclideorum; nonnisi indirecte tamen et modo imperfecto: per imagines scilicet quae — non sine deformationibus — delineant spatia curva in spatio euclideo. Possuntne spatia curva etiam directe et in seipsis considerari, sicut in seipsa considerari potest vera forma globi terrestris, non alterata per chartas geographicas?

Antequam huic quaestioni respondeatur aliquid dicendum est de natura scientiae geometricae et de eius obiectis.

Consistitne geometria — ut eius etymologia exprimit — in studio de corporibus veris et de mensuris eorum extensionum mediis physicis sumptis, aut tota versatur circa systemata abstracta, idealia?

Quodsi obiectum geometriae est ens mente conceptum, possuntne prima axiomata huius scientiae ex libera conventione statui (evitata vero quavis interna contradictione)? aut potius geometriae, etsi ideales, congruere quodammodo debent cum mundo physico, et in ipso habere saltem fundamentum sui?

Ad quid igitur nobis attendendum est si considerare cupimus directe ipsa spatia non euclidea: ad rem physicam aut ad ens logicum? ad meras conventiones, aut ad propositiones congruentes cum mundo physico? saltem quatenus in ipso habent fundamentum sui?

De hac re opiniones diversae habuerunt non solum philosophi, sed ipsi mathematici et physici.

Newton habuit de spatio (et similiter de tempore) ideas, quae — ad mentem auctoris — exhibendae sunt ut « realistae », sed quae potius dicendae sunt « ultra-realistae », necnon chimaerae potius quam entia rationis. Spatium a Newton intellectum est ut quid aeternum et immutabile: receptacu-

lum, necessario praeconstitutum, quod reciperet corpora a Deo creata. Sed iam nemo, physicus aut philosophus, sic loquitur.

Kant, ideas newtonianas cum fiducia excipiens ut tutas expressiones scientificas, coniecit spatio competere naturam idealem ; hac de causa coepit statuere formas illas subiectivas « a priori », quibus elaboravit suam solutionem problematis critici. Quae ideae vero duxerunt Kant ad ponendam geometriam euclideam ut unicam expressionem possibilem, et a priori necessariam, de proprietatibus spatialibus.

Gauss, *Lobačewski*, *Bolyai* egerunt potius philosophos positivistas et steterunt pro indole empirica geometriae : quare minutas mensuras curaverunt de angulis triangulorum (terrestrium et coelestium) ut iudicium ferrent de natura euclidea aut non euclidea nostri spatii physici.

Poincaré, in suo opere « de scientia et de hypothesi », exhibet axiomata geometriae ut liberas conventiones : etsi experimenta praebent occasionem et opportunitatem ad alias aut alias conventiones excogitandas, earum electio manet nihilominus libera ; sicut liberum est eligere coordinatas cartesianas aut polares, tale aut tale systema unitatum mensurae. Loquendum igitur est non iam de veritate cuiusvis geometriae, sed de eius « commoditate » seu aptitudine ut eius auxilio simpliciter describatur mundus physicus.

Einstein, in suo opere « de theoria particulari et generali relativitatis » scripsit conceptum veritatis non pertinere assertionibus purae geometriae, quia — explicat — attributum « verum » denotat conformitatem conceptuum cum obiectis prout sunt in re ; dum munus geometriae non illud est referendi conceptus ad obiecta experimentorum, sed tantum componendi ipsos conceptus nexu logico cohaerenti.

Eddington ex contrario, in suo opere « de spatio, tempore et gravitatione », geometriam exhibet ut scientiam experimentalem, qua perpendimus distantias et extensiones corporum, prout ipsas colligimus mensuris physicis. Et, iuxta recentiores cosmologias, communiter auctores affirmant nostrum spatium non esse euclideum.

Non omnes hae quaestiones nobis declarandae et solvendae

sunt antequam aggrediamur reliquam expositionem de spatiis non euclideis: non solum requireretur nimis longa discussio, sed etiam — mutata indole nostrae tractationis — prius evolveremus principia epistemologica idonea ad definiendam significationem et vim scientiarum, dum propositum nostrum est inverso ordine procedere.

Nulla scientia potest quidem institui quin adhibeatur ratiocinium et applicentur, saltem implicite, prima principia gnoseologica; sed haec communis condicio cuiusvis investigationis non ponit scientias (nominatim mathematicam, geometriam, physicam) sub dictione philosophiae: cuilibet enim fas est uti sua naturali vi cognoscendi et primis principiis cognitionis; et nominatim dictae scientiae sunt tot disciplinae praecipuae et independentes, quae non repetunt sua principia ex conclusionibus cuiusdam praeviae scientiae philosophicae.

Fas igitur est — sepositis interim quaestionibus philosophicis — inspicere prius in tractationes scientificas satis comprobatas suo ipso felici successu necnon consensu peritorum (attendendo tamen ad solas tutas positiones scientificas et non ad interpretationes quas mathematici et physici forte adiecerunt ut philosophi); *tales denique tractationes scientificae* — utpote genuini et probandi productus humani intellectus — *poterunt etiam declarare* — pro sua nativa significatione non retractanda — *nonnullas quaestiones philosophicas:* nequeunt enim rectae positiones philosophicae contradicere certis acquisitionibus scientificis.

CAPUT I

DE DUOBUS GENERALIORIBUS TYPIS SPATIORUM

56. Systemata mere geometrica.

Systemata geometrica, descripta in praecedenti capite, exhibita sunt — ad instar chartarum geographicarum — *ut imagines spatiorum non euclideorum ; sed possunt etiam considerari in seipsis*, non iam ut imagines alterius rei, sed ut entia exprimentia internas relationes metricas definiti entis extensi, desumptas ad normam peculiaris regulae metricae. Quae regulae metricae (non euclideae) iure possunt — ut ait Poincaré — statui « ex conventione » : nulla enim interna contradictione inficiuntur.

Talia vero entia — in se considerata — iure dicuntur entia geometrica non euclidea :

a) *Dicenda sunt in primis entia vere geometrica :* sunt enim entia extensa, quibus competunt internae relationes metricae ; de talibus autem entibus tractat geometria.

Notandum etiam est in ipsis systematibus habere interpretationem sui omnes et singulas proprietates, quas explicite postulant principia Euclidis, excepto postulato V (necnon postulato II si agitur de spatio elliptico).

Postulatum I de unica recta per quaevis bina puncta non stat sine exceptione in spatio elliptico, si consideratur spatium duplum et non simplex ; sed etiam partialis defectus huius proprietatis non impedit quominus agatur de vero ente geometrico, sicut superficies sphaerica manet obiectum geometriae etiamsi per binos antipodes transeant infinitae series geodeticarum.

b) *Sunt autem entia geometrica non euclidea : pro ipsis enim non stat postulatum V, sed alia propositio contraria.*

Quaeras an fortasse deficiat in talibus systematibus peculiaris proprietas, quae — etsi non explicite enunciata inter principia Euclidis — tacite tamen intelligatur. Nominatim notandae sunt ad hunc propositum regulae metricae adhibitae ad mensurandas extensiones : aequivalent usui unitatum elasticarum, quibus manifesto deformantur aestimationes extensionum.

Sed condicio contraria (postulans unitates rigidas) nullatenus dici potest nota propria et necessaria scientiae geometricae : manifesto hoc probat geometria proiectiva, cuius mensurae invariatae manent per varias operationes proiectivas, dum modificantur extensiones figurarum.

Concludimus igitur : entia illa, quae elaborata sunt ad repraesentanda spatia non euclidea, in se considerata, iure dici possunt « entia geometrica non euclidea », seu etiam « interpretationes geometriae non euclideae ». Interpretantur autem non solas proprietates metricas intra ambitus limitatos (ut pseudosphaerae Beltrami), sed etiam proprietates configurationis extensas ad integrum spatium.

Vis harum interpretationum geometricarum non euclidearum solet efficaciter illustrari sequentibus considerationibus : supponamus mathematicos, qui unice noverint geometriam euclideam et eam imperturbata opinione aestimaverint ut absolute necessariam, detegere aliquando tractatus geometriae non euclideae, ab ignotis auctoribus compositos.

Initio putant operas illas esse manifesto erratas ; dein vero, considerantes peritiam et methodum scientificam auctorum, coniciunt tales tractatus non posse destitui cohaerenti significatione ; et omne aenigma facile dissolvi potest si nonnulla verba, quae ponunt difficultatem (ut : linea recta — distantia — plana — curvatura ...), non obstante identitate vocis, diversam significationem habent in traditionalibus tractatibus euclideis et apud ignotos illos auctores. Quare nostri mathematici euclidei toti sunt in quaerendis significationibus agnoscendis illis verbis ut, sine contradictione, cohaereant cum affirmationibus non euclideis.

Construunt tandem illa ipsa systemata, quae in praece-

denti capite exposuimus; illa autem considerant in sua interna structura, et non ut imagines aliorum entium geometricorum. Quo opere aestimant se invenisse sufficientem interpretationem geometriae non euclideae: omnia enim verba obtinent suam definitam significationem, et denotant talia entia geometrica, quae vere exhibent mutuas relationes non euclideas. Praeterea, quod bene notandum est, omnes proprietates explicite enunciatae in principiis Euclidis, inveniunt in talibus systematibus propriam expressionem sui; quare — concludere licet — ratione habita de solis proprietatibus expresse declaratis — nonnulla entia geometrica (ut: recta — distantia ...) plus quam unam interpretationem admittunt.*

57. Systemata physica.

Systemata, de quibus dictum est in praecedenti paragrapho, ideo interpretantur spatia non euclidea quia, ad aestimandas extensiones, adhibent unitates velut elasticas, quae congrua lege dilatantur et contrahuntur.

Sed haec condicio nullatenus absona dicenda est si geometria consideratur — ut iure fit — tamquam studium de proprietatibus extensivis corporum, aestimandis per mensuras physicas; in his enim adiunctis, perfecta rigiditas sive corporum mensurandorum sive instrumentorum mensurae respondent statui ideali potius quam condicioni verae. In mundo enim physico plures causae alterant extensiones corporum: temperatura, campi electrici et magnetici, vires gravitationis, phaenomena mechanica, diversae reactiones corporum pro diversis viribus

* Systemata a nobis descripta (iuxta methodos repraesentationum conformium et geometriae proiectivae) non se exhibent ut unicas interpretationes possibiles geometriarum non euclidearum. Peculiarem mentionem merentur spatia analytica Riemanniana; tamen de iis nonnisi postea agemus; quaerendo enim interpretationes cohaerentes spatiorum non euclideorum, considerare debemus non solas proprietates metricas intra ambitus limitatos, sed etiam proprietates configurationis extensas ad integrum spatium, necnon condiciones quas hae ipsae proprietates supponunt. Ad quem finem aliae considerationes nobis perficiendae erunt praeter ea quae iam dicta sunt in apposita appendice de geometria riemanniana.

cohaesivis, ... ; neque ullo modo hae variae causae ita uniformiter agunt tum in corpora mensuranda tum in instrumenta mensurae ita ut constanter colligantur eaedem mensurae nullis deformationibus obnoxiae.

Praeterea, si aestimandae sunt extensiones dissitae, etiam propagatio lucis partem habet ; quare totum systema metricum est quid physicum, quod non absolvitur pura qualitate extensionis. Immo ipsa elementa geometrica constituuntur phaenomenis physicis : ut lineae constitutae radiis lucis.

In his adiunctis tam variis, conceptus geometrici, qui a priori apparent magis idonei ut congruant cum mensuris physicis, sunt potius conceptus geometriae non euclideae ; et quidem talis geometriae cuius curvatura neque constans sit. Quod si reapse bona congruentia datur inter mensuras physicas et schemata euclidea, hoc non a priori scimus, sed tantum ex experientia.

Quae apta congruentia praeterea, si practice admittenda est intra ambitus (etiam astronomicos) *nostrae experientiae directae, nequit pari iure affirmari quoad configurationem totius universi* (sicut sequentes paragraphi magis declarant) : discrepantiae enim (inter mensuras physicas et schemata euclidea) quae non apparent in certo ordine mensurarum, possunt crescere et iam non esse negligendae in ordine superiori : scimus enim etiam super superficies curvas vigere geometriam euclideam intra ambitus infinitesimos (cfr. n. 11, b).

Huiusmodi considerationes duxerant primos auctores geometriae non euclideae ad mensurandos amplissimos triangulos (terrestres et astronomicos) ut dignoscerent an fortasse schemata non euclidea aptiora essent ad describenda lineamenta universi physici. *Quod si responsio huic quaestioni in suspenso manet si agitur de integro universo, non sine ratione studia theorica geometriae excogitant et elaborant varia schemata possibilia.*

Haec igitur sit conclusio : schemata non euclidea iam apparent ut legitimae constructiones, quae etiam aptae inveniri possunt ad congruenter exprimenda lineamenta universi physici, si referendae sunt relationes metricae mediis physicis desumptae et si extensiones corporum concipiuntur non modo abstracto, sed ut inhaerentes ipsis corporibus et obnoxiae pluribus causis

physicis. Proprietates autem geometricae non euclideae, quae ad hos fines usui esse possunt, sunt tum proprietates metricae tum proprietates configurationis.

Quae dein dicentur de theoria relativitatis et de novis cosmologiis late illustrabunt has affirmationes.

Caput II

DE SPATIIS NON EUCLIDEIS IN THEORIA RELATIVITATIS

58. Characteres communes relativitatis particularis et generalis.

a. Vestis geometrica.

Theoria relativitatis conspicuum exemplum exhibet scientiae describentis phaenomena physica methodis geometricis : adhibet vero schemata geometrica quae discrepant a schemate euclideo.

Nequit paucis declarari omnis significatio et vis huius theoriae, quae etiam multifaria est (distinguitur in primis theoria relativitatis particularis et relativitatis generalis) ; sed, ad nostrum finem, illustranda praesertim est ea ratio qua theoria instituit interpretationem geometricam phaenomenorum.

Si de pura geometria agitur, elementa praecipua sunt :

— elementa linearia : quibus aestimantur extensiones respectu variorum systematum coordinatarum ;

— lineae geodeticae : iuxta quas extensiones obtinent mensuras extremas ;

— internae relationes metricae figurarum, et in primis triangulorum.

Iamvero, *ad describenda phaenomena, theoria relativitatis* (ad instar geometriae) :

— *definit elementum lineare :* in cuius constitutione vero partem habent varia elementa physica, praeter meram extensionem ;

— *tractat de lineis geodeticis : quae etiam induunt significationem physicam ;* constituuntur enim radiis lucis et traiectoriis corporum (quae lineae, pro variis adiunctis, possunt esse rectae aut curvae) ;

— *relationes metricas novas colligit* (ex propriis principiis empiricis et theoreticis), quas etiam exprimit per relationes inter elementa geometrica.

Ipsa physica classica, prae-relativistica, efficaciter illustrat quo pacto radii lucis et traiectoriae corporum haberi possint ut lineae geodeticae (per ipsum spatium tridimensionale) *etiam quando curvantur : utrumque phaenomenon enim — electromagneticum et mechanicum — regitur peculiari lege summae oeconomiae, cuius gratia nonnulla elementa physica obtinent mensuras minimas iuxta traiectorias naturales ;* quod si hae ipsae mensurae (quae evolvuntur iuxta traiectorias) assumuntur ad mensurandas ipsas traiectorias, hae acquirunt significationem linearum geodeticarum.

Ut res magis declaretur utiliter adduntur vel breves notitiae de dictis legibus summae oeconomiae.

1) *Si agitur de phaenomeno optico* (seu electromagnetico), *radius ita naturaliter propagatur inter duo puncta A, B ut eligat illam traiectoriam, quae sinit minimum dispendium temporis.*

Si spatium est homogeneum (uno indice refractionis praeditum) traiectoriae illae sunt rectae ; si vero index refractionis variatur, traiectoriae curvantur. Etenim : pro vario indice refractionis, variatur velocitas lucis ; velocitati autem minori respondet tempus longius ; quare — si minimum dispendium temporis admittendum est — radius eligit iter longius per quod tamen rapidius transeat potius quam viam breviorem per quam lentius procedat ; sic traiectoria recedit a via recta : nihilominus tempus insumptum est minimum ; quod tempus iure adhibetur ad exprimendum tractum percursum (sicut distantia stellarum exprimitur per tempus necessarium luci ut percurrat varia intervalla spatii) ; adhibita autem hac regula metrica ad aestimandas distantias, traiectoriae radiorum sunt tot lineae geodeticae, etiam cum curvantur.

2) *Si agitur de phaenomeno mechanico, traiectoriae naturales eae sunt quae sinunt minimam summam « actionis »* (« actio » exprimit productum quantitatis motus — $m\,v$ — per spatium — s — percursum).

Si producuntur per vacuum motus inertiales, velocitas non variatur; quare invariata manet etiam quantitas motus, et consequenter minima summa actionis producitur iuxta lineas minoris extensionis (s), et traiectoriae sunt rectae. Si vero adsunt corpora et vires attractivae agentes in corpus quod movetur, motus acceleratur, quantitas motus iam non manet constans; quare, ut habeatur minima summa actions, traiectoria deflectit a linea recta; non obstante vero quoddam augmento itineris, actio manet minima propter imminutionem quantitatis motus. Etiam in hoc casu, si ipsa actio, quae evolvitur per traiectoriam, assumitur ut mensura eiusdem traiectoriae, haec acquirit significationem lineae geodeticae, etiam si curvatur.

Ut bene notandum est, hae declarationes non significant theoriam relativitatis solum dare expressionem geometricam iisdem phaenomenis — nullatenus immutatis — physicae classicae; nonnisi comparatio instituta est quae perspicue illustrat naturam physicam quam induere possunt lineae geodeticae, et regulas metricas quae, ad aestimandas ipsas distantias, perpendunt non puram extensionem, sed etiam alios factores physicos (*ut tempus et quantitatem motus*).

b. Character physicus.

Theoria relativitatis, non obstante eius conspicua veste geometrica, est theoria physica: non solum quia describit facta physica, sed etiam quia nova phaenomena consideravit et patefecit.

Utpote scientia physica, theoria relativitatis (tum particularis, tum generalis) exordium ducit a factis experimentis compertis, ex quibus — per processum inductivum (non sine auxilio criteriorum theoreticorum) — assurgit ad generaliora principia; ex his denique deducit nova phaenomena, quae comprobanda manent experimentis. Experimenta autem constanter faverunt theoriae; quae congruentia confirmat characterem physicum theoriae et probat eius firmam positionem.

c. Aspectus relativi et absoluti.

Nomen « theoriae relativitatis » renuntiat aspectus relativos theoriae, qui procul dubio non desunt ; sed neque desunt aspectus absoluti ; hi autem praestantiores sunt, ita ut theoria rectius denominari potuisset « theoria absoluti » ; nomen vero « relativitatis » invaluit potius propter adiuncta inter quae theoria exorta est quam propter eius internam significationem.

Omnis theoria relativitatis — particularis et generalis — extendit illud classicum « principium relativitatis », quod iam a Galilaeo expressum erat, et cui etiam competit aspectus relativus et aspectus absolutus.

Principium classicum dicit phaenomena mechanica pari ratione produci (en aspectus absolutus) *sive systema* (in quo evolvuntur) *quiescat sive moveatur motu uniformi ; hac de causa* phaenomena interna systematis (ex. gr. : intra navem) nequeunt sua ipsa evolutione revelare motum (uniformem) eiusdem systematis ; et si systema comparatur cum aliis systematibus externis, *non apparent nisi* eorum *motus relativi* (ut velocitas navis respectu alterius navis, vel oceani) et nihil iudicari potest de quodam motu absoluto (en aspectus relativus principii).

Duae condiciones delimitant principium classicum : spectat in primis sola phaenomena mechanica ; dein spectat solos motus uniformes systematum (quae systemata, uniformiter mota, dicuntur « inertialia » vel « galilaeiana »).

Si systema movetur motu accelerato (etiam ob solam mutatam directionem motus), ut ipsa experientia communis nos docet, nova phaenomena producuntur intra ipsum systema quod acceleratur ; quae nova phaenomena renuntiant hunc motum acceleratum. Consequenter motibus acceleratis videtur competere significatio absoluta, quatenus non sunt mere relativi, sed tribuendi sunt huic definito systemati et non alteri.

Altera limitatio principii classici spectat naturam phaenomenorum, quae dicuntur pariter evolvi intra quodvis systema galilaeianum : tantum considerata sunt phaenomena mechanica.

Iamvero theoria relativitatis extendit principium auferendo utramque limitationem.

Prior forma theoriae, dicta « particularis », extendit principium ad phaenomena electromagnetica, praeterquam ad phaenomena mechanica.

Altera forma theoriae, dicta « generalis », extendit principium ad quodvis systema, utcumque motum, etiam motu accelerato.

Prior et altera theoria extendit aspectus relativos et absolutos ; de his speciatim dicemus in sequentibus paragraphis ; innuuntur hic solae generaliores notae communes horum aspectuum.

Exstant aspectus relativi quatenus phaenomena quae producuntur intra definitum systema nequeunt per seipsa manifestare statum motus systematis ; et si comparantur varia systemata inter se, definiri nequeunt nisi eorum motus relativi.

Exstant vero aspectus absoluti quatenus phaenomena servant eosdem characteres intra varia systemata ; propterea etiam servant eundem typum descriptionis quantumvis varientur systemata ad quae ipsa descriptio refertur.

Si attendimus ad expressionem geometricam theoriae, possumus comparare characteres intrinsecos et invariantes phaenomenorum et legum physicarum cum proprietatibus intrinsecis et invariantibus entium geometricorum ; talis est, ex. gr., proprietas lineae geodeticae, quae permanet linea minimae extensionis quantumvis varietur systema coordinatarum cuius respectu linea describitur ; item curvatura superficierum constanter eadem colligitur ex quavis expressione elementi linearis, quae varia fit pro vario systemate coordinatarum.

59. Spatium pseudo-euclideum theoriae relativitatis particularis.

a. Fundamentum empiricum et principium de constanti velocitate lucis.

Principium relativitatis classicum spectat sola phaenomena mechanica, quae Galilaeo iam satis perspecta erant.

Theoria autem electromagnetica — prout a Maxwell insti-

tuta est — eidem principio non obtemperat : sed supponit haec phaenomena diversam speciem exhibere pro diverso motu systematum, ita ut etiam idonea sint quae revelent motum absolutum (seu totale) corporum respectu aetheris quiescentis. Theoria enim maxwelliana postulat aetherem, velut oceanum immobile, per quem propagatur lux (et omnia phaenomena electromagnetica) et etiam corpora moventur ; supposito autem tali medio quiescenti, radius lucis, emissus — ex. gr. — ab observatore terrestri, diversa velocitate ab eo discedit prout terra movetur per aetherem in eandem directionem radii (currit post radium) aut procedit in directionem oppositam : componuntur enim inter se velocitas c signi luminosi et velocitas v terrae respectu eiusdem aetheris ; pro diverso igitur motu systematis, diversae dicendae sunt velocitates relativae lucis respectu observatoris terrestris, scilicet : $c - v$ et $c + v$. Quae variationes velocitatis (relativae) lucis renuntiant motum absolutum terrae respectu aetheris absolute quiescentis.

Nec illae variationes velocitatis — ratione habita de principiis physicae classicae et de adiunctis phaenomenorum — adeo exiguae dicendae sunt, quae possint nos ex toto latere : aptum medium ad illas revelandas praebent phaenomena interferentiae inter radios lucis, qui — hausti ex uno fonte et deducti per itinera diversa et tandem in unum denuo collecti — diversimode componant suam velocitatem cum velocitate lucis, pro diverso itinere in diversas directiones peracto ; tales est famosum experimentum Michelson-Morley : praevisum erat phaenomenon interferentiae non staticum, sed obnoxium translationi pro diversa dispositione instrumenti optici respectu motus terrae.

Contra vero expectationem theoreticam, experimenta (peritissime instaurata et severo examine perpensa) *numquam manifestaverunt ullam variationem velocitatis relativae lucis.* Item dicatur de aliis experimentis circa alia phaenomena electromagnetica.

Einstein fundamentum suae theoriae posuit in hac communi condicione experimentorum : velocitas lucis nullo modo componitur cum velocitate corporum, sed eadem permanet (per va-

cuum) *respectu cuiusvis systematis*. Quare, notavit, principium relativitatis extendendum est ad phaenomena electromagnetica, quae pariter evolvuntur quantumvis varietur motus systematis, et quae consequenter nequeunt manifestare ullum motum absolutum systematum.

b. Vis relativa simultaneitatis.

Posito principio de invariantia velocitatis lucis, nota relativa agnoscenda est mensuris de tempore e de simultaneitate phaenomenorum.

Etenim : *iuxta rationem maxwellianam concipiendi aetherem, datur possibilitas theoretica ut omnes observatores* (pertinentes variis systematibus galilaeianis) *tribuant parem mensuram temporis variis eventibus, etiam dissitis et motis :* possunt enim reconstruere verum momentum temporis in quo definitus eventus productus est, computando (ratione habita de diversa velocitate relativa lucis respectu proprii systematis) tempus insumptum a luce ut notitiam ferret de phaenomeno dissito et praeterito. Pariter autem definitis ab omnibus observatoribus veris temporibus variorum eventuum, consensus datur etiam quoad phaenomena simultanea.

Deficientibus autem condicionibus suppositis a physica classica, novum criterium adhibendum est ut iudicetur de simultaneitate phaenomenorum ; quod criterium potest sequenti ratione definiri : ea habenda sunt simultanea quae, producta in locis pariter dissitis ab observatore, ab hoc ipso observatore simul videntur.

Notemus hoc criterium admitti non posse si stat physica maxwelliana : considerandum enim restat motus systematis respectu aetheris et diversa compositio diversorum radiorum lucis cum velocitate systematis. Admissa vero nova basi theoriae relativitatis, criterium illud necessario applicandum est ; *hoc vero sequitur : duo eventus, aestimati simultanei ab observatore O, iam non habentur simultanei ab alio observatore O' alterius systematis galilaeiani.* Quae condicio potest sequenti consideratione comprobari : comparentur duo systemata galilaeiana, quorum velocitas relativa sit v (fig. 59) :

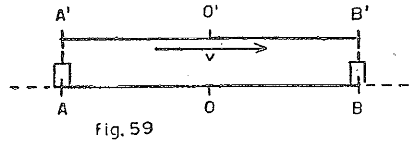


fig. 59

bina extrema duorum systematum gignant, per mutuum contactum, signa luminosa. Tum observator O tum O' teneant positionem mediam inter extrema proprii systematis. Ponamus O simul percipere duo signa luminosa provenientia ex extremis A et B; concludit (pro criterio statuto) duas emissiones lucis factas esse simul. Consequenter aestimat : systema $A' B'$ eiusdem longitudinis esse ac systema $A B$ (eorum bina extrema simul congruebant) ; observator O' (medius inter $A' B'$) fuerat coram O eodem momento quo emissa sunt duo signa luminosa. Cum vero O percipit duo signa, iam O' nequit esse coram ipso (translatus est velocitate v inter propagationem duorum signorum) ; quare etiam dicendum est O' non simul percipere eadem duo signa (quae si conveniunt coram O, nequeunt etiam convenire coram O' alibi posito) ; applicando igitur idem criterium, O' aestimat duo signa luminosa non simul emissa esse.

Quae omnia significant varios observatores, pro vario suo motu, assignare tempora diversa variis eventibus. Nec solae mensurae temporis dicendae sunt relativae, sed etiam mensurae spatii : si enim mensurandae sunt extensiones systematum relative motorum, iudicandum etiam est de positione simultanea eorum extremorum ; sed hoc iudicium est relativum. Idem exemplum, iam descriptum ad illustrandam notam relativam simultaneitatis, etiam declarat mensuras relativas de spatio : observator O aestimat systema $A' B'$ eiusdem longitudinis esse ac systema $A B$ quia habuerat ut simultaneas duas emissiones lucis ; ex contrario O', qui non habet ut simultaneas duas emissiones signorum, concludit bina extrema duorum systematum non simul obvia facta esse, et propterea duo systemata non esse eiusdem longitudinis.

c. Dilatatio temporis.

Theoria relativitatis colligit ex ipso principio de invariantia velocitatis lucis relationes inter varias mensuras spatiales et temporales, quas varii observatores colligunt de iisdem phaenomenis et rebus.

Consideretur in primis intervallum temporis inter duos definitos eventus, aestimatum a duobus observatoribus O et O' quorum velocitas relativa sit v; eventus producantur in systemate O' ita ut O' quiescat eorum respectu. Pro utroque observatore duratio intervalli exprimitur per discrimen inter tempora assignata duobus eventibus; sed illa discrimina nequeunt esse aequalia; stat vero sequens relatio:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Scilicet: *observator O colligit ex suis mensuris durationem longiorem quam O'.*

Haec relatio, innixa velocitate mere relativa systematum, est omnino reciproca: pari titulo observator O' colligit mensuras temporis longiores quam O si agitur de aestimanda duratione phaenomenorum quae evolvuntur in systemate O.

Notemus discrimen inter duas mensuras esse minimum et negligendum (immo neque apparet) usquedum velocitas v est practice nulla respectu velocitatis c lucis: tunc enim denominator $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ confunditur cum unitate. Sed discrimina inter mensuras iam non sunt negligenda si agitur de altissimis velocitatibus astronomicis, vel particularum elementarium materiae.

d. Contractio spatii.

Analoga, sed inversa, relatio stat inter mensuras de intervallis spatialibus: segmentum, quod transvehatur una cum systemate O', aestimatur brevius ab observatore O; et vicissim si

agitur de dimensione systematis O. Si motus supponitur fieri iuxta ipsam directionem axis x, et si $x_1\, x_2$, $x_1'\, x_2'$ denotant coordinatas quas duo observatores tribuunt extremis cuiusdam intervalli spatialis, stat relatio :

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

e. Expressio mathematica « invariantiae » velocitatis lucis.

Considerentur duo systemata galilaeiana $O\,(x, y, z, t)$ et $O'\,(x'\, y'\, z'\, t')$, *quorum origines coincidant in momento* $t = t' = 0$, ex quo incipiunt mensurari intervalla temporis. *In hoc ipso momento* $t = 0$ *ex origine* O *axium emittatur signum luminosum*, quod in omnes directiones diffundatur velocitate c ; superficies undae luminosae sunt tot sphaerae concentricae (centrum in O), quarum radius crescit ratione directa cum tempore t pro velocitate lucis c ; scilicet :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2$$

seu :

$$c^2 \cdot t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Sed, si lux pari velocitate c propagatur etiam respectu systematis O' (non obstante velocitate relativa v duorum sytematum), phaenomenon eadem formula describitur etiam respectu alterius systematis ; scilicet :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot t'^2$$

i. e. : *phaenomenon pari ratione describitur quantumvis referatur ad diversa systemata galilaeiana.*

Aliis verbis : inter quaternas coordinatas $x\, y\, z\, t$, $x'\, y'\, z'\, t'$ *duorum systematum inertialium stare debent tales mutuae relationes quae relinquant invariatam expressionem :*

$$c^2 \cdot t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

quae etiam potest scribi :

$$t^2 - \frac{1}{c^2}\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \tag{I}$$

Invariantia huius expressionis (respectu cuiuslibet systematis galilaeiani) *constituit primum principium theoriae relativitatis.* Ex hac ipsa invariantia deducuntur relationes quibus referri debent ad invicem quaternae coordinatae duorum systematum ; hae relationes dicuntur « relationes Lorentz »* : qui

---

* Formulae Lorentz exprimunt relationes quibus referuntur ad invicem quaternae coordinatae $x\,y\,z\,t$ et $x'\,y'\,z'\,t'$ duorum systematum inertialium si obtemperandum est principio invariantiae theoriae relativitatis.

Si, simplicitatis causa, motus relativus duorum systematum supponitur produci iuxta ipsam directionem axium x, x', transformationes lorentzianae invariatas relinquunt coordinatas y, y' et z, z' et scribuntur :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - x \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

(L)

$$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' - x' \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Quare, si quoddam phaenomenon iam descriptum est respectu alterutrius systematis O aut O', eius descriptio respectu alterius systematis, deducitur ex priori, si ei applicantur transformationes (L).

Classicae transformationes « galilaeianae », referentes ad invicem coordinatas duorum systematum inertialium, sunt :

$$\text{(G)} \qquad \begin{array}{cccc} x' = x - vt & y' = y & z' = z & t' = t \\ x = x' + vt & y = y' & z = z' & t = t' \end{array}$$

Transformationes vero (G), dum obtemperant principio relativitatis classicae (servando invariatum typum aequationum mechanicarum), non obtemperant novo principio einsteiniano : si nominatim applicantur aequationi :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{1}$$

eam mutant in sequentem :

$$(x' - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{2}$$

quae binae aequationes describunt propagationem lucis iuxta classicam rationem concipiendi, referentem phaenomenon ad aetherem immobilem : prior aequatio competit systemati privilegiato, quiescenti in aethere, cuius respectu velocitas lucis sit ipsa velocitas c lucis respectu aetheris ; altera vero renuntiat compositionem velocitatis lucis cum

physicus hoc ipsum problema mathematicum iam tractaverat, quamvis ad alium finem; Einstein illas ipsas relationes adhibuit, eis conferendo novam interpretationem. Ex iisdem relationibus Lorentz deducuntur eae mensurae relativae temporum et spatii (cfr. c, d), quae inferunt dilatationem temporis et contractionem spatii.

f. Intervallum spatio-temporale absolutum.

Si mensurae separatae de intervallis spatialibus et temporalibus sunt relativae (quia diversae pro diverso motu relativo observatorum), *extat nihilominus peculiaris mensura mixta, spatio-temporalis, cui competit vis absoluta:* invariata enim manet quantumvis a diversis observatoribus referatur ad diversa systemata galilaeiana. Haec mensura absoluta dicitur mensura intervalli spatio-temporalis inter duos eventus: considerandae simul sunt differentiae tum inter tempora tum inter coordinatas spatiales quae competunt duobus eventibus, iuxta sequentem formulam:

$$(t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\}$$

velocitate sysmetatis, et indicat velocitatem absolutam v ipsius systematis respectu aetheris quiescentis.

Transformationes (L) ex contrario invariatas relinquunt aequationes electromagneticas (et nominatim — ut probat simplex substitutio algebrica — aequationem 1); congruunt propterea cum relativitate einsteiniana. Lorentz scripserat relationes (L) tamquam artificium mathematicum, cuius gratia aequationes electromagnetismi gauderent proprietate invariante; Einstein retinuit ipsas relationes, eis tribuendo novam significationem physicam: iam non agitur de arbitrario artificio mathematico, sed exprimunt veras relationes quae constanter colliguntur inter coordinatas diversorum systematum inertialium, quantumvis varientur phaenomena physica, quorum auxilio aestimantur ipsae coordinatae.

Ponendo talia principia, Einstein implicite postulavit novam mechanicam; etenim: transformationes (L) non relinquunt invariatas aequationes mechanicae classicae, sed illas ita modificant ut contradicant ipsi principio relativitatis classicae. Quaesivit propterea Einstein novas aequationes mechanicas, quae bene congruerent cum phaenomenis et quae simul gauderent proprietate invariante respectu transformationum (L). Quae nova mechanica indicavit nova phaenomena (cinematica — dynamica — relationem inter massam et energiam), quae experimentis comprobata sunt.

Par structura manifesto competit huic intervallo spatio-temporali et functioni (I) exprimenti invariantiam velocitatis lucis; propter hanc parem structuram, etiam intervallum spatio-temporale invariatum manet respectu transformationum Lorentz, seu: invariata manet mensura intervalli spatio-temporalis inter duos definitos eventus quantumvis varientur systemata galilaeiana ad quae referuntur mensurae et descriptio phaenomenorum.

g. Elementum lineare pseudo-euclideum definiens metricam chronotopi.

Intervallum spatio-temporale nunc definitum, si refertur ad duos eventus infinite proximos, scribitur:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{I'}$$

Si mensurae sumuntur ad normam huius regulae metricae (stantibus etiam inter coordinatas diversorum systematum relationibus Lorentz) *sequitur principium invariantiae velocitatis lucis, invariantia cuiusvis intervalli finiti spatio-temporalis, necnon omnes relationes inter mensuras cinematicas relatas ad varia systemata; quare elementum lineare* (I′) *ad synthesim revocat totam relativitatem particularem.*

Aspectus geometricus huius synthesis manifestus est: elementum lineare (I′) recensendum est inter varias possibiles expressiones elementi linearis geometrici, si correlatio ponitur inter eventus chronotopi (definitos per quaternas coordinatas x, y, z, t) et puncta spatii geometrici (definita per easdem coordinatas); sequens autem paragraphus exponit repraesentationem graphicam eorundem principiorum theoriae relativitatis.

Patet similitudo inter elementum lineare (I′) *et formam propriam cartesianam elementi linearis euclidei;* quae similitudo potest urgeri si elementum lineare relativitatis scribitur (sub forma aequipollenti — v. notam seq.):

$$ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 - c^2 \cdot dt^2$$

et si sumitur pro quarta coordinata $x_4 = i \cdot c \cdot t$ (introducta unitate imaginaria) ; tunc enim obtinetur expressio euclidea :

$$ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 + dx_4{}^2$$

Praetermissa ceteroquin hac similitudine formali, stat nota propria geometriae euclideae de lineis geodeticis aequidistantibus (seu de unica recta parallela).

Stat nihilominus etiam discrimen inter elementum lineare relativitatis particularis et elementum lineare euclideum ; qua de causa metrica relativitatis dicitur pseudo-euclidea.

Forma enim elementi linearis (I′) *non est definita propter signum negativum quod continet* ;* quare, si paria sunt (quoad valorem absolutum) membra positiva et membra negativa, distantia fit nulla etiam inter duos eventus qui distinguuntur propter diversas coordinatas spatiales et temporales ; quod contingit quoties :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c^2$$

quoties scilicet agitur de eventibus quorum locus mutatur ipsa velocitate lucis. *Quare traiectoriae* (*spatio-temporales*) *radiorum*

* Elementum lineare chronotopi, propter suam structuram non definitam, solet duobus in modis scribi :

(t) $\quad ds^2 = dt^2 - [1/c^2]\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

(s) $\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2$

Sub priore forma (t) elementum exhibet dimensionem temporis ; sub altera vero forma (s) dimensionem spatii.

Alterutra forma adhibetur prout praestat pars temporalis aut pars spatialis, prout scilicet $(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,/\,dt^2 \lessgtr c^2$.

In priore casu agitur de intervallo inter eventus quorum subsequens positiò per spatium variatur velocitate minore velocitate lucis ; tales nominatim sunt eventus inter quos stat nexus causalis, cum nequeat ulla actio propagari citius quam lux ; casus limes est ipsa propagatio signi luminosi.

In altero casu agitur de eventibus inter quos nequit dari nexus causalis ; nominatim agitur de rebus quae coëxistunt.

Si in expressione (t) deficit ex toto pars spatialis, non exprimitur nisi variatio temporalis interna cuidam systemati galilaeiano.

Si in expressione (s) deficit ex toto pars temporalis, non exprimuntur nisi dimensiones propriae cuiusdam systematis.

lucis per vacuum dicendae sunt (pro regula metrica statuta) *lineae geodeticae exhibentes longitudinem nullam.*

h. Vis theoriae relativitatis particulis.

Fundamentum theoriae relativitatis particularis stat (cfr. a) *in peculiaribus condicionibus experimentorum,* quae non manifestant ullam compositionem velocitatis lucis cum velocitate terrae.

Quae facta foecunditatem accipiunt vi positionum theoreticarum, quae — propter suum characterem absolutum et universale — valde excedunt ambitum nostrae experientiae : affirmatur in primis sine exceptione et pro toto universo « invariantia » velocitatis lucis (per vacuum) ; item absolute et sine exceptione ponuntur relationes Lorentz : excluduntur scilicet mensurae — quavis methodo sumptae et quovis phaenomeno physico innixae — quae ponant inter coordinatas duorum systematum inertialium relationes diversas a relationibus lorentzianis.

Argumenta apta ad commendandum et confirmandum totum hoc aedificium etiam in suo aspecto absoluto et universali ad sequentes considerationes revocantur :

— nullum datum empiricum contradicit theoriae ;

— ad consonam synthesim revocantur mechanica et electrodynamica (cfr. n. 58, c) ;

— plura phaenomena aptius describuntur per hanc theoriam : ut constantia velocitatis lucis ; nonnulla pheanomena cinematica ;

— nova phaenomena vi theoriae praevisa sunt, quae cum experimentis congruunt : ut impossibilitas accelerandi particulas materiales ita ut attingant velocitatem lucis ; quo enim velociores fiunt, eo altiores energiae requiruntur ad illas ulterius accelerandas ; et tali lege crescunt hae energiae ut deberent fieri infinitae ut conferrent velocitatem lucis.

Ad nostrum finem non requiritur ut haec omnia rite exponantur et perpendantur ; seposita etiam accurata analysi et discussione de vi theoriae relativitatis, *exemplum ex ea colli-*

gimus (quod sequens n. 60 magis illustrat) *peculiaris interpretationis geometricae phaenomenorum physicorum;* neque agitur de systemate geometrico euclideo.

60. Chronotopus Minkowski.

a. Expressio graphica theoriae relativitatis particularis.

*Minkowski dedit conspicuam expressionem graphicam relationibus metricis theoriae relativitatis.**

Haec repraesentatio speciatim nobis consideranda est, quia efficaciter illustrat nexus inter physicam et geometriam. Tria puncta notentur:

— *expressio geometria, quam obtinere possunt phaenomena physica;*

— *significatio physica, quam potest induere systema geometricum;*

— *exemplum entis geometrici* — significatione non destituti — *exhibentis relationes metricas diversas ab euclideis.*

Phaenomena physica (in praesenti exhibenda sub forma geometrica) sunt phaenomena cinematica; sed eorum repraesentatio geometrica fit statica, quia tempus graphice exprimitur per axem, non minus quam dimensiones spatiales (sicut

---

* Haec repraesentatio deducitur methodis mathematicis ex ipsis transformationibus lorentzianis, quibus exprimuntur praecipuae positiones relativitatis particularis.

Formulae Lorentz (modificatis aliquomodo earum variabilibus x, t) vertuntur in sequentem formam:

$$\begin{aligned} x' &= \quad x\,\mathrm{Ch}a - y\,\mathrm{Sh}a \\ y' &= -x\,\mathrm{Sh}a - y\,\mathrm{Ch}a \end{aligned}$$

Quae formulae valde similes sunt illis quibus exprimitur rotatio plani euclidei circa originem O axium per angulum a (cfr. n. 24); in qua transformatione plani in seipsum manent uniti (prater originem O) omnes circuli $x^2 + y^2 = \text{const.}$, quorum centra sunt in O.

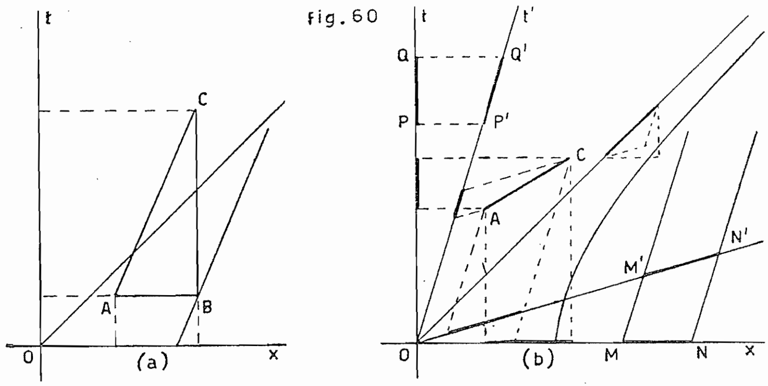
Similiter formulae Lorentz (prout transformatae sunt) exprimunt peculiarem transformationem plani x, y (seu x, t) in seipsum: agitur de affinitate qua manent unitae duae rectae bisectrices angulorum $x\,y$, necnon omnes hyperboles aequilaterae $x^2 - y^2 = \text{const.}$

Haec elementa peculiarem significationem habent in nostra repraesentatione; et ex ipsis deducuntur varia alia elementa repraesentationis quae sequentes paragraphi exponunt.

fit in tabellis horariis graphicis) ; quare diversae condiciones systematum, quae per tempus evolvuntur, omnes simul exhibentur, relatae vero ad diversa puncta axis temporis.

Huiusmodi descriptio graphica nequit ante oculos ponere totum spatium physicum (tridimensionale) : una enim dimensio reservanda est ad exprimendum tempus ; tamen expressio mere analytica horum entium potest esse quadridimensionalis et referre totum spatium physicum.

Simplicitatis causa, consideramus repraesentationem tantum bidimensionalem, quae ceteroquin sufficit ad nostrum finem : altera dimensio (t) exprimit tempus ; altera autem (x) dimensionem spatialem iuxta unam directionem ; quare etiam motus supponuntur fieri iuxta hanc directionem (fig. 60, a).



b. Lineae horariae.

Praecipuum elementum huius repraesentationis est ea linea, « linea horaria » denominata, cuius puncta, suis binis coordinatis x, t, indicant — pro quovis momento temporis t — punctum x quod attingit signum luminosum vel corpus (punctiforme) progrediens iuxta rectam x ;

Speciatim notanda est linea horaria signi luminosi, quod emittatur ex puncto O in momento $t = 0$: *si spatium* c *percursum a luce per unitatem temporis assumitur ut unitas mensurae spatii et repraesentatur pari segmento ac unitas tem-*

poris, linea illa horaria constituitur recta bisectrici anguli $t\,x$; distinguuntur autem duae lineae bisectrices pro diversa directionem in quam procedit lux.

Lineis horariis corporum (quae transferuntur velocitate minori velocitate lucis) competit maior angulus inclinationis — respectu axis x — quam lineae horariae signi luminosi : per aequale enim intervallum temporis percurrunt minus spatium.

c. Intervalla spatialia - temporalia - mixta.

Varia puncta plani $A\,(x_1, t_1)$, $B\,(x_2, t_2)$, $C\,(x_3, t_3)\ldots\ldots$ repraesentant totidem eventus, definitos per suas coordinatas spatiales et temporales.

Si duo puncta A, B inveniuntur supra rectam parallelam axi x (planum repraesentans supponitur euclideum), duo eventus dicendi sunt simultanei, quia par est earum coordinata temporis ; quae simultaneitas vero affirmatur tantum pro observatore qui quiescat respectu axis x (hucusque non consideramus nisi repraesentationem phaenomenorum respectu huius systematis) ; *intervallum* igitur $A\,B$ est *mere spatiale.*

Si duo puncta B, C inveniuntur supra rectam parallelam axi t, *intervallum* BC est *mere temporale,* et puncta B et C repraesentant duos eventus, qui producti sunt subsequentibus temporibus in eodem puncto systematis $O(t, x)$.

Tandem, si duo puncta A, C habent diversas tum coordinatas spatiales tum coordinatas temporales, intervallum AC non repraesentat meram distantiam localem aut merum intervallum temporis, sed *intervallum mixtum spatio-temporale.*

d. Elementum lineare et lineae geodeticae.

Ut colligantur vero relationes metricae propriae theoriae relativitatis, intervalla spatio-temporalia aestimanda non sunt consueto elemento lineari cartesiano :

$$ds^2 = dt^2 + dx^2$$

sed elemento lineari non definito (pseudoeuclideo) :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \qquad (c = 1)$$

Lineae geodeticae, quae respondent huic regulae metricae, sunt lineae rectae plani euclidei ; tales sunt omnes lineae horariae si moventur velocitate uniformi ; quare *traiectoriae (spatio-temporales) motuum naturalium inertialium et radiorum lucis (per vacuum) constituunt tot lineas geodeticas huius repraesentationis graphicae relativitatis.*

Dantur etiam lineae geodeticae inter se aequidistantes, ita ut stet proprietas praecipua euclidea : tales sunt lineae horariae pariter inclinatae ; ipsae repraesentant motum duorum mobilium, quae progrediuntur pari velocitate.

e. Relatio unius eiusdemque repraesentationis ad diversa systemata inertialia.

Proprium est theoriae relativitatis comparare mensuras — tum spatiales tum temporales — *quae tribuuntur eisdem intervallis cum ipsa referuntur ad systemata galilaeiana diversa. Iamvero chronotopus Minkowski exhibet has comparationes,* neque requirit ut separatim reproducantur lineae horariae phaenomenorum, sed *sufficit ut eadem repraesentatio graphica referatur ad novos axes t', x' diversimode inclinatos* (fig. 60, b).

Consideretur systema $O'(t', x')$ quod moveatur velocitate v respectu systematis iam considerati $O(t, x)$: linea horaria puncti O' recedentis ab O (definita respectu systematis $O(t, x)$) assumenda est tamquam novus axis (t') temporum ; similiter statuendus est novus axis spatialis x' ita ut pares sint duo anguli $t\,t'$ et $x\,x'$. Si igitur considerandae sunt mensurae eorundem intervallorum respectu huius novi systematis inertialis, illae referendae sunt ad novum systema cartesianum obliquum t', x'.

Modificanda vero est unitas mensurae : pro unoquoque systemate $O'(t', x')$, relativa unitas mensurae exhibetur per segmentum $O\,A'$, quod secat supra axem x' hyperboles $x^2 - y^2 = 1$.*

* Haec omnia deducuntur ex ipsis transformationibus Lorentz, quae exprimunt rationem qua modificantur coordinatae si eventus referuntur ad novum systema galilaeianum, et quae etiam intelligi possunt (cfr. notam sub § a) ut affinitates mutantes planum in seipsum,

f. Nota relativa simultaneitatis - dilatatio temporis - contractio spatii.

Omnes hae notae theoriae relativitatis conspici possunt in nostra repraesentatione graphica (fig. 60, b).

Eventus simultanei respectu systematis $O(t, x)$ ii sunt quorum imagines graphicae (expressae per duo puncta) stant supra rectam parallelam axi x; eventus vero simultanei re-respectu systematis $O'(t', x')$ illi sunt quorum imagines stant supra rectam parallelam axi x' ($t' =$ const.).

Cum inclinatio summa ad quam tendere possunt varii axes x' ea est quae competit lineae horariae lucis (45°), chronotopus Minkowski distinguit (respectu uniuscuiusque eventus; ex. gr. O: fig. 61) tres regiones:

praeteritum, futurum, et regionem colligentem omnes eventus qui — pro vario motu relativo observatorum — possunt aestimari simultanei eventui O.

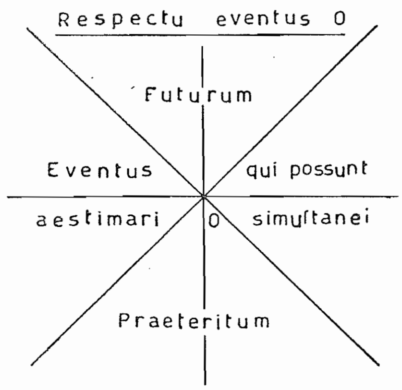


fig. 61

Repraesentatio exhibet diversas proiectiones unius eiusdemque intervalli $A\ C$ supra axes cartesianos rectos et axes obliquos; iamvero hae proiectiones exprimunt mensuras spatiales et temporales quae tribuuntur eidem intervallo si ipsum refertur ad diversa systemata (NB. unitas mensurae — ut dictum est — non manet edem si intervallum refertur ad diversos axes; sed variatio huius unitatis non est talis quae servet invariatas mensuras spatiales et temporales intervallorum).

---

relinquendo nihilominus unita nonnulla elementa, quae sunt: origo $O \equiv O'$ axium — lineae bisectrices angulorum tx, $t'x'$ (constituentes lineas horarias lucis) — omnes hyperboles $x^2 - y^2 =$ const.; axes vero t, x rotantur pari angulo in directionem oppositam et mutantur in axes t', x'.

Colliguntur denique illae ipsae relationes :

$$dt = dt' / \sqrt{1 - \beta^2}\,; \qquad dx = dx' \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \qquad (\beta^2 = v^2/c^2)$$

quibus iam expressae sunt (cfr. n. 59, *c*, *d*) dilatationes mensurae temporis et contractio mensurae spatii. Si considerantur mensurae spatiales, comparanda sunt duo segmenta $M\,N$ et $M'\,N'$ disposita iuxta axes x et x' et comprehensa inter easdem lineas horarias m, n exprimentes translationes punctorum M', N' systematis O' : observator enim O habet ut simultaneas positiones M, N. Similiter, si considerantur mensurae temporis, comparanda sunt segmenta $P\,Q$ et $P'\,Q'$ disposita supra axes t et t' et contentas intra easdem rectas parallelas axi x. (NB. Longitudines segmentorum MN, $M'\,N'$, $P\,Q$, $P'\,Q'$ aestimandae sunt sua propria unitate mensurae (cfr. 60 e) ; his autem unitatibus adhibitis, colliguntur relationes metricae relativitatis).

g. Invariantia velocitatis lucis et intervalli spatio-temporalis.

Notentur tandem eae proprietates quae constituunt fundamentum theoriae relativitatis.

Lineae horariae signi luminosi manent constanter lineae bisectrices angulorum tx, $t'\,x'$, . . . ; *quare lux servat invariatam suam velocitatem* $c = 1$ *respectu cuiusvis systematis.*

Intervallum spatio-temporale inter duos definitos eventus P', Q' (*aestimatum iuxta formulam* $ds^2 = dt^2 - dx^2$, *et ratione habita de unitatibus variorum systematum*) *invariatam mensuram obtinet quantumvis referatur ad diversa systemata. Quae mensura communis reducitur ad intervallum mere temporale illius systematis cuius axis* t' *transit per duos eventus* P', Q' (fig. 60, b) : *hoc intervallum temporis exprimit* « *tempus proprium* » *cuiusdam phaenomeni* (cuius momenta extrema sint P' et Q'), *aestimatum ab observatore qui quiescat respectu eiusdem phaenomeni ;* ceteri observatores tribuunt eidem phaenomeno durationes diversas, sed omnes possunt deducere eius tempus proprium ex mensurato intervallo spatio-temporali. Quare nota absoluta

competit, non minus quam velocitati lucis, etiam intervallis spatio-temporalibus et tempori proprio phaenomenorum.

Iam notavimus dari in hac geometria lineas geodeticas exhibentes longitudinem nullam ; tales autem sunt lineae horariae cuiusvis signi luminosi per vacuum : pro his lineis geodeticis constanter est $dt = dx$ (respectu omnis systematis), quare etiam est $ds = dt - dx = 0$. Quae mensura nulla colligitur etiam si consideratur, ut casus limes, systema eiusdem radii lucis : tum axis temporis tum axis spatialis confunduntur cum linea horaria radii ; quare aestimanda manet directe ipsa longitudo huius rectae ; sed unitas mensurae facta est infinita ; colligitur propterea mensura nulla pro quovis intervallo finito lineae geodeticae.

h. Notae euclideae et non euclideae huius systematis geometrici.

Hae notae iam enunciatae sunt ; iuverit nihilominus eas in unum conspectum collegisse :

1. *Notae euclideae :*

— forma elementi linearis similis est formae euclideae ; immo, per opportunam mutationem variabilium (introducta tamen unitate imaginaria) colligitur eadem forma euclidea :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

— lineae geodeticae sunt rectae ;

— dantur lineae geodeticae (seu rectae) aequidistantes ; stat scilicet proprietas de unica parallela.

2. *Notae non euclideae*

— forma elementi linearis non est definita ; quare dantur lineae geodeticae exhibentes longitudinem nullam. Qua de causa, geometria chronotopi dicitur « pseudoeuclidea » ;

— si attendimus ad ipsam repraesentationem graphicam chronotopi, ut colligantur relationes metricae relativitatis, segmenta diversa adhibenda sunt ut unitates mensurae, quae crescunt usque in infinitum ;

— non solae extensiones linearum partem habent in constitutione elementi linearis, sed etiam tempus et notae propriae phaenomeni propagationis lucis.

61. Interpretatio ultrarealistica chronotopi Minkowski et hyperspatia pluridimensionalia.

Repraesentatio graphica mundi theoriae relativitatis particularis tanta admiratione excepta est ab ipso auctore, necnon ab aliis physicis et a vulgo, quae exhibita sit tamquam vera species mundi, antea abscondita oculis hominum et tandem revelata propter meritum theoriae relativitatis. *Tributa* scilicet *est chronotopo Minkowski interpretatio vere « ultrarealistica »*, *qua tributa sunt mundo physico — tamquam notae verae — etiam peculiares modi repraesentandi.*

Qua de causa passim affirmatae sunt sententiae vere mirae ; ex. gr. :

— *tempus* (quod in repraesentatione graphica exprimitur per lineam) *non est res distincta a spatio ; sed constituit eius quartam dimensionem, ceteris homogeneam.*

— *eventus praeteriti, praesentes et futuri* (qui in repraesentatione graphica simul exhibentur et stant) *simul existunt et permanent* (sicut series diversarum imaginum in «film») ; quare etiam sermo fuit de structura fibrosa mundi physici, intexta scilicet tot lineis horariis.

Non percipimus vero simul praeteritum et futurum, quia tantum conspicimus eventus distributos iuxta particularem sectionem spatii tetradimensionalis, respondentem cuidam particulari puncto axis temporis.

— *diversae aestimationes de eventibus simultaneis sunt velut diversae perspectivae, sub quibus conspicimus staticum mundum tetradimensionalem*, prout eius sectiones varie inclinantur respectu dimensionis temporis (sicut in repraesentatione graphica dantur sectiones diversimode inclinatae, dimersimode definientes simultaneitatem eventuum).

Huiusmodi hyperboles ut plurimum iam desueverunt, aut manent potius ut modus loquendi quibus significantur directe proprietates ipsius repraesentationis graphicae mundi relativitatis, et indirecte confuse intelliguntur eae proprietates mundi physici quae praebent fundamentum talibus descriptionibus. Nihilominus adhuc passim exhibentur eaedem mirae propositiones

tamquam expressiones verae naturae mundi ; nominatim saepius contingit ut sermo fiat de mundo tetradimensionali, tamquam de re ab Einstein demonstrata : quarta autem dimensio — aiunt — est tempus.

Iamvero tales expressiones non parum obnoxiae sunt aequivocationi ; notemus, ad hunc propositum, ipsum Einstein — agentem de cosmologiis deductis ex theoria relativitatis (cfr. n. 63) — loqui de forma sphaerica universi tridimensionalis.

Nemo procul dubio negat etiam tempus necessario partem habere in describendis phaenomenis physicis, et ipsum mundum physicum vere moveri, ita ut tempus sit mensura eius motus ; sed haec non sufficiunt ut mundus dicatur extendi per quatuor dimensiones ; secus etiam loqui deberemus de sex dimensionibus addendis tribus dimensionibus spatialibus, quia sex parametri independentes requiruntur ad definiendos motus corporum (tres pro tribus translationibus elementaribus in tres directiones orthogonas et tres pro tribus dispositionibus axium rotationum) ; et adhuc aliae dimensiones addendae sunt si motus non sunt rigidi ; nec motus corporum absolvuntur solis motibus mechanicis.

Licet procul dubio loqui de hyperspatiis pluridimensionalibus, si hoc nomine designantur entia analytica, ad quorum elementa definienda requiruntur plus quam tres variabiles. Et haec ipsa entia (et eorum elementa particularia) *possunt etiam utiliter designari nominibus geometricis* (ut ex. gr. : « hypersphaera ») ob analogam structuram analyticam ordinariorum entium geometricorum ; sed haec omnia nondum solvunt problema de possibilitate mundi corporei, qui extendatur per plus quam per tres dimensiones, quae sint omnes orthogonae inter se.

De hoc problemate dein agemus ; ad illud autem declarandum plures aliae considerationes requiruntur, et non sufficiunt sola elementa quae praebet theoria relativitatis, sive particularis sive generalis.

62. Spatium non euclideum theoriae relativitatis generalis.

a. Nova extensio principii relativitatis classici.

Theoria relativitatis generalis — ut iam notatum est — novo titulo extendit principium relativitatis classicum, ita ut tandem perveniat ad novam descriptionem legum physicarum, quae merito vindicaret theoriae nomen « theoriae absoluti » : statuuntur enim novae descriptiones phaenomenorum, quae invariatum servant suum typum characteristicum, quantumvis descriptiones ipsae referantur ad systemata utcumque mota, etiam motibus acceleratis.

Aspectus absolutus non deerat etiam primae expressioni classicae principii relativitatis : quia phaenomena mechanica intra systemata inertialia pariter evolvuntur sive systema moveatur (motu uniformi) sive quiescat, ideo phaenomena illa non valent revelare statum motus aut quietis systematum ; nec descriptiones phaenomenorum mutant suum characterem si referuntur ad varia systemata inertialia : non dantur nisi eae variationes parametrorum quae respondent diversis motibus relativis systematum ; sed non datur ulla variatio quae distinguat particulare systema propter suum particularem statum physicum.

Theoria relativitatis particularis iam extenderat principium, illud applicando etiam ad phaenomena electrodynamica ; sed, pariter ac physica classica, non affirmabat principium nisi quoad systemata galilaeiana. Aliter dicendum erat si agebatur de systematibus acceleratis : intra talia systemata producuntur phaenomena nova, quae renuntiant diversum statum physicum systematis ; ideo motibus acceleratis videtur competere nota quaedam absoluta (quatenus tribuendi sunt tali et non alii systemati), et consequenter descriptio phaenomenorum mutat suum characterem si refertur ad systemata non inertialia.

Non obstantibus vero his argumentis, principium relativitatis videbatur postulare novam extensionem sui : theoria enim relativitatis particularis scripta erat tantum pro syste-

matibus inertialibus ; sed talia systemata reapse non dantur quia corpora moventur per campos gravitationis ; theoria igitur magis adhaerens veris condicionibus mundi physici postulabat talem extensionem principii quae etiam comprehenderet systemata accelerata. Persuasum etiam erat Einstein phaenomena describi posse per characteres intrinsecos, ita ut non variarentur eorum lineamenta quantumvis descriptio referretur ad systema diversum.

b. Fundamentum empiricum novae theoriae.

Non minus ac theoria relativitatis particularis etiam theoria relativitatis generalis fundamentum sui habet in datis empiricis ; scilicet : par omnino mensura competit « massae » corporum tum in phaenomeno inertiali tum in phaenomeno gravitationis.

Haec aequalitas duarum mensurarum nequit a priori affirmari, quia, quamvis adhibeatur unum nomen « massae », significantur in duobus casibus duae distinctae proprietates, quibus videntur prima fronte etiam competere notae diversae :

— si de phaenomeno inertiae agitur, « massa » (quae etiam dicitur « massa inertialis ») exprimit resistentiam quam corpora opponunt impulsibus ipsis applicatis ad ea acceleranda ;

— si vero agitur de phaenomeno gravitationis, « massa » (quae dici potest « massa gravitationis ») significat promptam obtemperationem corporum attractioni terrae, adeo ut ipsa massa videatur causa accelerationis.

*Stat vero, ut mensurae minutissimae et accuratissimae testantur, omnimoda aequalitas inter duas massas ; propter quam aequalitatem sequentes condiciones * possunt haberi in phaenomenis :*

1) *respectu systematis accelerati per vacuum reproduci possunt exacte* (etiam quoad minutissimas mensuras) *eadem phaenomena quae fiunt in systemate galilaeiano in campo gravitationis ;*

2) *respectu systematis accelerati per campum gravitationis*

---

* Probant has condiciones phaenomena pressionis (1) et motus liberi (2) qui producuntur in cella quae accleretur per vacuum (1) aut libere cadat in campo gravitationis (2).

possunt exacte reproduci eadem phaenomena (inertialia) *quae fiunt in systemate galilaeiano per vacuum.*

Interna igitur phaenomena systematum nequeunt — sua ipsa indole — renuntiare eorum naturam galilaeianam aut non galilaeianam, sed possunt pariter intelligi :

— (in primo casu) ut phaenomena inertialia in systemate accelerato vel ut phaenomena gravitationis in systemate galilaeiano ;

— (in altero casu) ut phaenomena gravitationis in systemate accelerato vel ut phaenomena inertialia in systemate galilaeiano.

Deficiunt propterea ea discrimina quae iam diviserant phaenomena inertialia et phaenomena gravitationis in duas classes plane diversas ; quaerenda vero restat apta synthesis quae sub uno generaliori aspectu colligat diversas species particulares phaenomenorum, et quae simul rationem reddat de identitate « massae » in utroque phaenomeno.

c. Problema solvendum.

Einstein pulcherrimam synthesim sibi proposuerat quae etiam dicenda est interpretatio geometrica phaenomenorum : tribuit ampliorem vim uni legi inertiae (in cuius expressione partem habet massa inertialis corporum) ; *vi huius legis omnia corpora, quae naturaliter moventur, percurrunt lineas geodeticas spatii* (chronotopi) ; *hae autem lineae geodeticae — quae rectae sunt per vacuum — curvantur si adest materia* (*seu campus gravitationis*), *quia materia modificat proprietates metricas spatii.* Aliis verbis : motus speciatim adscripti gravitationi revocantur ad peculiares manifestationes inertiae corporum per spatium modificatum (in suis proprietatibus metricis) propter praesentiam materiae.

Manifesta est indoles geometrica huius synthesis. Notanda est ad hunc propositum *forma statica* (geometrica) *quam acquirit descriptio de motibus :* motus enim evolvuntur per tempus, sed tempus exhibetur velut nova dimensio spatii, et diversi status subsequentes corporum exhibentur ut constituentes

lineas horarias, quae stant; systemata diversimode mota (ad quae descriptio phaenomenorum referri possunt) exhibentur ut tot diversa systemata linearum coordinatarum, quae sunt rectae usquedum agitur de systematibus galineianis (cfr. chronotopum Minkowski), sed generatim varie curvantur.

Non obstante vero hac veste geometrica, substant notae physicae (*motus, tempus, materia*) quae concurrunt ad determinandas proprietates metricas spatii. Si igitur solutio problematis exhibet speciem geometricam, geometria ex alia parte fit scientia physica. Ipsum nomen « spatii » acquirit significationem physicam: iam non indicat abstractum spatium mathematicum, nec meras extensiones corporum, sed etiam rationes quibus extensiones mensurantur ad normam peculiaris regulae metricae, quae pendet etiam ex materia praesenti, et quae ad synthesim revocat extensiones et tempus.

Ut problema solveretur, satis non erat enunciare solam ideam nunc expositam, sed *definiendum erat aptum elementum lineare chronotopi, quod daret eas ipsas mensuras de extensione corporum et de motibus, quae experimentis reapse colliguntur.*

Recta solutio problematis obtemperare etiam debebat severis condicionibus:

— expectandae in primis erant novae expressiones legum naturalium: expressiones enim classicae generatim formam diversam exhibent prout referuntur ad systemata diversimode mota (quae condicio non congruit cum positione einsteiniana);

— ex alia parte admitti non poterant nisi levia discrimina inter novas leges et leges classicas; istae enim et nominatim lex gravitationis newtonianae iam satis idoneae comprobatae erant ad describenda phaenomena;

— denique omnia discrimina, quae distinguerent leges relativitatis, experimentis comprobanda erant.

Felici autem successu Einstein absolvit suum opus, obtemperando omnibus condicionibus et obtinendo confirmationem experimentorum.

d. Criteria et subsidia adhibita.

Haec criteria et subsidia, si minute declaranda essent, *nimis amplam et difficiliorem expositionem exposcerent*, praesertim ob non consuetas methodos mathematicas ; *sed tantum opus neque requiritur ad nostrum finem :* quidquid est de methodis, conclusiones nobis pensandae sunt. *Praetermittendae nihilominus non sunt breves mentiones de his argumentis ut recte intelligatur indoles theoriae.*

Sequentia capita praesertim notentur :

1. Interpretatio geometrica legum physicarum.

Est ipsa interpretatio de qua iam dictum est (cfr. § c), cuius gratia *traiectoriae naturales tum corporum tum lucis, sive per vacuum sive per campos gravitationis, constituunt lineas geodeticas chronotopi.*

Restat igitur definiendum aptum elementum lineare chronotopi, quod det tales lineas geodeticas quae vere congruant cum traiectoriis naturalibus.

Huiusmodi interpretatio geometrica phaenomenorum ducit ad novam expressionem principii inertiae : « punctum materiale — cui non applicentur vires — semper percurrit (etiam per campos gravitationis) lineam geodeticam chronotopi ». Notemus autem, in praesenti casu (ob formam indefinitam elementi linearis) lineas geodeticas constituere percursum maximum et non minimum inter duo determinata puncta.

Elemento lineari chronotopi certo competere debet generalis forma elementi linearis cuiusvis spatii riemanniani (sequens paragraphus novo argumento illustrabit hanc rem) ; cum vero distinguantur in chronotopo quatuor coordinatae, generalior expressio elementi linearis continet decem terminos (cfr. n. 52) :

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}\, dx^2_1 &+ g_{12}\, dx_1 dx_2 + g_{13}\, dx_1 dx_3 + g_{14}\, dx_1 dx_4 \\ &+ g_{22}\, dx_2^2 + g_{23}\, dx_2\, dx_3 + g_{24}\, dx_2\, dx_4 \\ &\qquad + g_{33}\, dx_3^2 + g_{34} dx_3 dx_4 \\ &\qquad\qquad + g_{44}\, dx_4^2 \\ = \quad &\Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

Leges naturales manifesto exprimendae sunt per coëfficientes g_{ik}*:* leges enim naturae determinant motus et traiectorias; quae traiectoriae — si sunt geodeticae chronotopi — pendent ex coëfficientibus g_{ik}.

Nominatim lex gravitationis exprimenda est per aptos coëfficientes elementi linearis.

2. Congruentia cum relativitate particulari.

Relativitas particularis constituit casum limitem relativitatis generalis, deficientibus campis gravitationis; quare elementum lineare relativitatis generalis tendere debet ad elementum iam notum relativitatis particularis si materia evanescit aut in indefinitum recedit.

Etiam si adsunt campi gravitationis, quaedam congruentia stare debet inter duo elementa linearia; nam:

praesente campo gravitationis, datur particulare systema acceleratum S, cuius respectu phaenomena (per ambitum limitatum: theoretice infinitesimum) evolvuntur sicut phaenomena inertialia per vacuum (cfr. n. 62, b); descriptio igitur phaenomenorum respectu systematis S apte fit per elementum lineare relativitatis particularis. Opus propterea est ut elementum lineare relativitatis generalis (quo ratio habetur de campo gravitationis) sit talis typi qui confundatur (intra ambitum illum limitatum) cum typo elementi relativitatis particularis: ducere enim debet ad describendum idem phaenomenon in eodem loco; quare, per aptam transformationem coordinatarum, alterum elementum debet in alterum mutari.

Res perspicue declaratur ex analogis condicionibus elementi linearis superficiei curvae (ex. gr. sphaerae) *et plani tangentis:*

intra ambitum infinitesimum, superficies curva confunditur cum plano tangenti, et eius segmenta geodetica cum segmentis geodeticis eiusdem plani; quare (intra ipsum ambitum) etiam typus elementi linearis sphaerae confundi debet cum typo elementi linearis plani (ex. gr.: $ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\, d\varphi^2$ et $ds^2 = dx^2 + dy^2$; quae elementa possunt alterum in alterum mutari per aptam transformationem coordinatarum). Non obstante

vero hac delimitata congruentia duorum elementorum, si unum elementum lineare sphaerae (expressum per unum systema coordinatarum) extenditur ad totam superficiem curvam, necessario ei tribuendi sunt coëfficientes varii, qui per nullam transformationem coordinatarum possunt omnes reduci ad unitatem sicut coëfficientes elementi euclidei : sed superficies curva necessario modificat typum elementi linearis.

Analoga autem relatio stat inter elementum lineare chronotopi curvi relativitatis generalis et elementum lineare chronotopi plani relativitatis particularis : chronotopus enim curvus tendit ad chronotopum planum si campi gravitationis evanescunt, et — per ambitum limitatum — duo chronotopi confunduntur, sicut confunduntur traiectoriae curvae et traiectoriae rectae. Quae congruentia, adhibitis locutionibus geometricis, ita declaratur : chronotopus curvus relativitatis generalis concipi potest constitutus tot limitatis portionibus tangentibus chronotopi plani relativitatis particularis, ea ipsa ratione qua superficies curva concipi potest constituta tot minutissimis portionibus planorum tangentium ; praeterea, intra ambitus limitatos, confunduntur typi elementorum linearium chronotopi curvi et chronotoporum planorum ; sed, si una expressio elementi linearis (relata ad unum systema coordinatarum) scribenda est pro toto chronotopo curvo, necessario ei tribuendi sunt coëfficientes varii qui nulla transformatione coordinatarum reduci possunt omnes ad unitatem ; quod fit propter praesentiam* campi gravitationis, seu propter praesentiam materiae ; quare, concludimus, praesentia materiae modificat typum elementi linearis et reddit curvum chronotopum : phaenomenon physicum recipit hac ratione interpretationem geometricam.

---

* Hac de causa (ut iam postulatum est in paragrapho praecedenti) etiam elementum lineare relativitatis generalis reduci debet ad formam differentialem quadraticam ; unicum systema coordinatarum, extensum ad totum chronotopum, exigit diversos coëfficientes g_{ik} (qui sunt functiones loci), sed servat formam differentialem quadraticam.

3. Artificium mathematicum.

Propter aequalitatem inter massam gravitationis et massam inertialem, effectus gravitatis aequari possunt (intra ambitum limitatum : theoretice infinitesimum) effectibus quos producit inertia in systematibus acceleratis ; hac de causa inquisitio de lege gravitationis (seu de forma tribuenda coëfficientibus g_{ik} elementi linearis) *vertitur in operationes mathematicas circa transformationes coordinatarum.*

Quod artificium tamen non sufficit solum ad solvendum problema : alia enim subsidia annumerantur ; nedum eliminat (ut passim affirmatur) quamvis aliam considerationem de datis empiricis praeterquam de experimentis circa massam gravitationis et massam inertialem : criterium enim, de quo infra dicitur sub § 6, supponit etiam auxilia praestita ab experimentis classicis.

4. Principium relativitatis seu « invariantiae » legum physicarum.

Leges naturales invariatam servare debent suam formam typicam quantumvis varientur coordinatae, quarum respectu leges describuntur.

Haec proprietas, quae sequitur principium relativitatis, extendenda est si ipsum principium relativitatis extenditur : leges scilicet physicae eaedem debent esse non solum pro observatoribus galilaeianis (translatis motibus rectis uniformibus), sed pro omnibus observatoribus.

Duo argumenta solent adduci ad hoc postulatum suadendum :

— deficit ratio sufficiens ob quam detur systema privilegiatum ;

— phaenomena physica producuntur propter congruentias eorum elementorum in eodem loco ; quibus congruentiis competit character absolutus et non relativus.

5. Geometria intrinseca spatiorum riemannianorum.

Cum obtemperandum sit principio « invariantiae », attente consideranda sunt et perpendenda omnia elementa quae non pendent ex particulari systemate coordinatarum.

Consideranda igitur venit illa geometria intrinseca spatiorum, quae extendit ad quodlibet spatium riemannianum quae Gauss evolverat tractando de geometria intrinseca superficierum; haec geometria dicitur etiam « geometria Riemanniana ».

Supponitur in primis non variari, per transformationem coordinatarum, distantias inter puncta, aestimatas ad normam elementi linearis: quae condicio postulat coëfficientes elementorum linearium non sine determinatis rationibus mutari posse; nominatim requiritur ut geodeticae maneant tales. Finis autem geometriae intrinsecae est in lucem ferre ea omnia, (ut proprietates, formulae, leges mathematicae...) quae non pendent ex peculiari systemate coordinatarum, necnon omnia entia (ut lineae geodeticae et curvatura) quae per definitos processus calculi nectuntur cum expressione elementi linearis, nec variantur variantibus coordinatis.

« Calculus differentialis absolutus », quem Ricci primus elaboravit (1855), *praestat instrumentum mathematicum ad haec omnia tractanda:* exhibet autem sub forma analytica omnes proprietates intrinsecas spatiorum et eorum regulas metricas.

Peculiaria entia methematica, quae tali calculo elaborantur et tractantur, ea sunt quae denominantur « tensores »; saltem eorum nomen dicendum erat, quia theoria relativitatis eis speciatim utitur, et propterea de ipsis facile fit mentio cum exponuntur vel generaliora elementa relativitatis generalis. De ipsis « tensoribus » teneatur haec idea generalis: sunt collectiones magnitudinum eiusdem naturae (quae dicuntur « componentes » tensoris), quarum « valores » definitis rationibus computantur pro quavis mutatione coordinatarum. Quare quaevis lex, quae exprimi possit per aequalitatem duorum tensorum, non pendet ex systemate coordinatarum. *Relativitas autem generalis postulat ut omnis lex exprimatur sub forma tensoriali.*

Coëfficientes autem g_{ik} *elementi linearis constituunt decem componentes « tensoris fundamentalis » chronotopi : per talem tensorem nominatim exprimitur lex gravitationis.*

6. Congruentia cum physica classica.

Nova lex gravitationis nonnisi parum differre poterat a classica lege newtoniana : haec enim lex (etsi inexacta, perficienda et aptanda principio invariantiae) eximios successus nihilominus iam assecuta erat ; quare non multum discrepare poterat a vera evolutione phaenomenorum ; idonea igitur censenda erat ad tuto dirigendas investigationes.

Quare Einstein, requirens rectam solutionem sui problematis, *etiam inspexit — tamquam in exemplar — in aequationem classicam (quae dicitur aequatio « Poisson ») quā referuntur ad invicem duae magnitudines congruenter distributae per spatium : materia et « potentialis gravitationis »* (ex quo potentiale derivantur vires agentes per campos gravitationis).

Aequatio constituitur iuxta methodos « differentiales » physicae mathematicae : scribuntur scilicet generaliores condiciones quibus obtemperare debent — in singulis portionibus infinitesimis spatii — magnitudines physicae constituentes phaenomenon ; dein, per solutionem talium aequationum « differentialium » (seu — ut dicitur — per processum « integrationis »), transitus fit a condicionibus spectantibus singulas partes infinitesimas ad lineamenta totius phaenomeni (quae varia sunt pro diversis adiunctis problematis).

Aequatio Poisson scribitur :

$$\Delta\Phi = -4\pi k\varrho$$

— Φ denotat potentialem gravitationis ;
— ϱ denotat densitatem materiae per singula volumina infinitesima spatii ;
— k denotat coëfficientem constantem gravitationis ;
— Δ non est nisi signum, quo breviter indicantur nonnullae operationes (calculi differentialis) applicandae potentiali gravitationis (quibus operationibus prius deducuntur ex

potentiale vires campi, et dein ex viribus campi peculiaris coëfficiens, qui comparari potest cum coëfficiente dilatationis cubicae in problemate de potentiale elastico et de viribus elasticis).

Einstein quaesivit novam formam tensorialem tribuendam legi gravitationis, quae congruam analogiam servaret cum aequatione Poisson ; quae analogia debebat — inter cetera — cavere ut servarentur nonnulla principia classica (ut de conservatione massae et energiae).

e. Solutio problematis et eius comprobationes.

1. Nova lex gravitationis.

Einstein tandem sequenti forma expressit legem gravitationis, referendo ad invicem materiam (necnon radiationes) *distributam per spatium et proprietates metricas spatii, determinantes eius lineas geodeticas* (seu traiectorias motuum naturalium) :

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G \cdot g_{ik} = -\varkappa \cdot T_{ik}$$

Haec formula exhibetur ut symbolum, neque requiritur ut intelligatur eius significatio. Pauca nihilominus notentur :

— duo membra huius formulae respondent duobus membris aequationis Poisson ;
— g_{ik} denotant ipsos coëfficientes elementi linearis (quare 10 aequationes distinguuntur quot sunt hi coëfficientes) ;
— G_{ik} denotant componentes peculiaris tensoris derivati ex g_{ik} ;
— G est factor invarians deductus ex tensore G_{ik} ;
— T_{ik} est novus tensor qui respondet densitate materiae et radiationum per spatium ;
— $\varkappa$ est coëfficiens constans nexus cum coëfficiente constanti gravitationis.

Formula igitur einsteiniana exprimit rationem qua metrica localis (pendens ex g_{ik}) reagit praesentiae materiae et radiationum. Quae relatio fit magis perspicua si denuo comparatur

cum aequatione Poisson : alterum membrum utriusque aequationis refert distributionem spatialem materiae ; prius vero membrum aequationis classicae exprimit condiciones quibus oboediunt illae vires campi gravitationis ex quibus tandem pendent traiectoriae naturales motuum ; si autem agitur de formula einsteiniana, prius membrum exprimit condiciones quibus oboediunt illi coëfficientes g_{ik} ex quibus tandem pendent lineae geodeticae chronotopi, seu traiectoriae naturales phaenomenorum.

Hac comparatione inter duas formulas denuo illustratur :

— *interpretatio geometrica phaenomenorum physicorum, propria theoriae relativitatis ;*

— *vis physica huius geometriae.*

2. Character geometricus et non euclideus solutionis.

De charactere geometrico descriptionis einsteinianae iam satis dictum est (cfr. nn. 58, a ; 60, a).

Confirmandus et declarandus restat character non euclideus chronotopi.

Prout postulant phaenomena gravitationis, chronotopus est reapse curvus : eius lineae geodeticae (seu traiectoriae naturales corporum et radiorum) *non fiunt rectae nisi per regiones satis dissitas a materia ;* planetae vero, percurrentes suas orbitas circa solem (quae orbitae considerandae sunt evolutae etiam iuxta dimensionem temporis chronotopi), sequuntur lineas geodeticas curvas (cfr. n. 62, d) ; item radius lucis (rectus per vacuum) curvatur (ut experimentis comprobatum est) si transit prope magnam massam materiae (ex. gr. prope solem).

Iuxta metricam statutam, intervalla temporis dilatantur (i. e. phaenomena naturalia lentius evolvuntur) *propter ingentes coagmentationes massarum. Item mensurae extensionum iam non oboediunt (prope massas) regulis euclideis :* variatur ex. gr. proportio inter longitudinem circuli et eius diametrum (quae variatio nihilominus infima est in ordinariis adiunctis ; Couderc, *o. c.*, p. 108, affert exemplum quod non infert nisi mutationem vigesimae quartae notae decimalis numeri π).

Omnes notae non euclideae revocantur ad curvaturam superficierum geodeticarum ; quare spatium relativitatis generalis dicendum est spatium curvum.

Eius vero curvatura exprimitur per peculiarem relationem analyticam inter excessum geodeticum et areas triangulorum ; quae relatio nullam admirationem excitat nec ullam difficultatem ponit saltem quoties :

1) *geometria induit significationem physicam :* alii enim factores physici — praeter meram extensionem — partem habent in definienda regula metrica ; et lineae geodeticae fiunt quasi materiales, adhaerentes phaenomenis physicis ;

2) *factores physici, determinantes regulam metricam, non modo homogeneo ubique adsunt et agunt ;* quare etiam fit ut lineae geodeticae spatii curventur.

In talibus adiunctis, relationes metricae quae colliguntur comparari possunt cum relationibus metricis desumptis ex extensionibus mensuratis unitatibus elasticis (cfr. n. 57) : nemo miratur si colliguntur relationes metricae non euclideae.

Eadem curvatura, utpote proportio inter excessum geodeticum et aream triangulorum, potest etiam declarari per imaginem geometricam superficiei curvae ; sed huiusmodi comparatio inepta est ad rem nostram declarandam.

Tales enim comparationes adhuc clarae sunt si spectant curvaturam entis physici bidimensionalis et analogam curvaturam superficiei flexae circa tertiam dimensionem ; sed, si agitur de spatio physico tridimensionali, ens pure geometricum — quod exhibeat per suas extensiones pares relationes metricas — deberet esse spatium tridimensionale curvum saltem circa quartam dimensionem ; quod si denique agitur de chronotopo quadridimensionali, fingendum esset spatium tetradimensionale curvum saltem respectu quintae dimensionis ; requirerentur autem etiam 10 dimensiones ut repraesententur quaedam curvaturae chronotopi magis implicatae. Nemo autem quaerit ut res, quae non ponit difficultatem, declaretur per imagines quas non possumus nobis fingere.

3. Comprobationes astronomicae legis Einstein.

Tria phaenomena deducta sunt ex nova lege, quae omnia comprobata sunt experimentis ; quae sunt :

a) *Perihelium orbitae planetarum non immotum manet respectu solis.*

Aliis verbis, orbita planetarum non est perfecta ellipsis quae clauditur in seipsam ; sed planeta, deflectens de itinere iam percurso inter antecedentem revolutionem, sequitur traiectoriam non clausam : perinde ac si percurreret quidem perfectam ellipsim, sed haec simul lente rotaretur circa suum focum, seu solem.

Theoria autem definit etiam amplitudinem huius rotationis perihelii ; quae amplitudo magis conspicua fit si agitur de planeta Mercurio proximo soli.

b) *Radius lucis, procedens ex stella, qui tangat margines solis, non pergit recta sed curvatur.*

Etiam quoad hoc phaenomenon, theoria praevidet mensuram deflexionis.

c) *Lineae spectrales radiorum provenientium ex intensis campis gravitationis aliquatenus transferuntur versus rubrum* (effectus Einstein — praevisus etiam sub aspectu quantitativo).

Interni enim motus atomici, quibus generantur emissiones lucis, lentiores fiunt (dilatatio temporis in campis gravitationis) ; quare ipsi luci emissae competit frequentia imminuta respectu frequentiae nostrorum experimentorum terrestrium.

Multa dicenda sunt si adaequate declarare velimus et phaenomena et vim experimentorum (ratione etiam habita de variis causis physicis aptis ad talia phaenomena producenda) ; sed haec omnia (non negligenda si disputandum esset de vi theoriae relativitatis prout est theoria physica) nostram tractationem non spectant : iam enim satis comprobatum restat theoriam relativitatis generalis exhibere descriptionem geometricam phaenomenorum ; et relationes metricae — non euclideae — huius geometriae nec ulla interna incohaerentia inficiuntur, nec definita significatione destituuntur.

Iure igitur affirmamus spatium relativitatis generalis non esse euclideum.

Caput III

DE SPATIIS NON EUCLIDEIS IN NOVIS COSMOLOGIIS

63. Universum staticum sphaericum (1um studium Einstein).

a. Problema cosmologicum theoriae relativitatis.

1. Condiciones suppositae.

Lex einsteiniana de gravitatione relationem instituit inter distributionem spatialem materiae et energiae et formam chronotopi ; quae lex applicata et comprobata est intra particulares ambitus spatii ; potestne eadem lex — ratione habita de materia distributa per totum spatium — revelare formam totius universi ?

Einstein ipse hoc novum et arduum problema sibi proposuit ; ut vero illud aggredi posset, eliminare in primis debuit difficultatem provenientem ex ratione nimis varia (et nonnisi partim nota) qua materia distribuitur per spatium : quare *consideravit universum fictum, per quod materia uniformiter diffusa sit.*

Densitas vero ϱ huius materiae congruere debet cum densitate media quae — quantumcumque scimus — agnoscenda est nostro universo vero. Uniformis autem apparet distributio galaxiarum, necnon earum natura et moles media ; quare densitas media materiae iure deduci potest ex massa stellarum et materiae obscurae contenta in regione spatii iam telescopiis explorata ; quae summa materiae dividenda est per volumen spatii in quo continetur. Ordo autem huius densitatis aestimatum fuit, tunc temporis, inter $10^{-24} \div 10^{-27}$ gr/cmc.

Etiam aliae condiciones simpliciores positae sunt :

— *densitas constans tum materiae tum energiae radiantis ;*

— *distributio isotropa* (par scilicet in omnem directionem) *energiae* ;

— *distributio isotropa* — et consequenter ubique homogenea* — *curvaturae per spatium « geometricum »* (quo attributo designabimus spatium physicum extensum).

2. Elementum lineare.

Pro condicionibus positis, typus elementi linearis eligendus erat tantum inter tres typos geometriae ellipticae, euclideae aut hyperbolicae, exhibentes curvaturam constantem positivam, nullam aut negativam (cfr. n. 52).

Apta electio coordinatarum ducit ad formas typicas riemannianas :

$$ds^2_g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{[1 + z \cdot D / 4 \cdot R^2]^2} \qquad z = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \quad K = \begin{cases} +1/R^2 \\ 0 \\ -1/R^2 \end{cases}$$

$$D = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Cui elemento tridimensionali addenda manet dimensio temporis ; ratione autem habita tum de velocitate constanti lucis per medium homogeneum tum de elemento lineari relativitatis particularis (cum quo novum elementum congruere debet curvatura fit nulla, seu si $z = 0$), scribendum est :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 + ds_g^2$$

b. Solutio statica.

Einstein, ut faciliorem redderet primam solutionem problematis cosmologici, postulaverat — inter ceteras condiciones — *universum staticum,* cuius densitas invariata permaneret, et distantia inter varia puncta non esset functio systematica temporis. Reapse haec positio non valuit ad faciliorem reddendam tractationem problematis : immo et gravem difficultatem posuit et ad tempus impedivit visionem variarum solutionum possibilium.

* Ut a Schur demonstratum est : curvatura, quae invariata permanet in puncto P quantumvis diversimode iaceant in P superficies geodeticae, etiam ubique eadem est.

Serius ipse Einstein retractavit suam primam positionem, sponte amplectendo novam solutionem dynamicam Friedmann ; initio vero quaesivit talem legem metricam, quae non variaretur per tempus ; quare coëfficientes elementi linearis obtemperare debebant aequationibus gravitationis statitae (in quibus partem habent densitas et pressio p medii). Solutio autem harum aequationum dedit :

$$p = \frac{c^2}{6} - \varrho \, ; \qquad z = +1 \, ; \qquad R = \sqrt{\frac{6}{\varkappa \cdot c^2 \cdot \varrho}}$$

Quare tandem scribendum erat :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \left[\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{4 R^2}\right]^2}$$

et si adhibentur consuetae coordinatae polares astronomicae :

$$\text{(E)} \qquad ds^2 = c^2 \, dt^2 - R^2 \{dx^2 + \sin^2 \chi \, (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\varphi^2)\}$$

in qua expressione, pars spectantem spatium « geometricum » est ea ipsa qua iam descripsimus metricam spatii sphaerici (cfr. n. 48).

Colliguntur propterea sequentes conclusiones :

— *forma sphaerica competit spatio geometrico tridimensionali :* universum clauditur in seipsum ; non datur superficies clausa universi qua ipsum universum limitetur (universum maneret intra et extra : sicut superficies sphaerica respectu lineae clausae eiusdem sphaerae). Aliis verbis : universum est finitum, sed sine terminis.

— *radius hypersphaerae* (deductus ex eius relatione cum densitate materiae) attingit ordinem millium millenorum millium annorum lucis : 10^9 ann.-luc. ($= 9{,}46 \cdot 10^{21}$ km). Radius autem infinitus (seu spatium euclideum) respondet casui limiti densitatis nullae.

— *forma totius chronotopi, respectu dimensionis temporis, dicenda est cylindrica :* lineae horariae omnium punctorum

recta et pari inclinatione evolvuntur ; ipsae sunt lineae generatrices apertae hypercylindri tetradimensionalis ; hypersphaera autem tridimensionalis est « directrix » hypercylindri.

c. Nova expressio legis gravitationis.

Duae difficultates obstant expositae solutioni problematis cosmologici :

1) Exemplar universi statici (in quo etiam constans est velocitas lucis) non est aptum ad explicandum effectum Hubble, de quo statim dicemus (cfr. n. 64) : invariatis enim manentibus longitudinibus et velocitate lucis, lineae spectri nequeunt transferri quantumvis lux proveniat ex remotissimis regionibus.

Haec vero difficultas nondum percipiebatur cum Einstein (1916) concepit suam primam solutionem (cfr. n. 64) ; latebat tamen.

2) *Condiciones suppositae ducebant ad tribuendam pressionem negativam* levissimae nebulae cosmicae ;* haec autem pressio negativa nullo pacto poterat explicari, nec cohaerebat cum natura statica solutionis.

Ut hanc gravem difficultatem superaret, Einstein modificavit aliquatenus legem gravitationis ; quam scripsit :

$$G_{ik} - G \cdot g_{ik} + \boxed{\lambda \cdot g_{ik}} = -\varkappa \cdot T_{ik}$$

addendo scilicet novum membrum, in quo apparet quidam coëfficiens constans λ, *quem dixit coëfficientem « constantem cosmologicum ».*

Sub aspectu mathematico, additio novi membri etiam apta dici potest, quia sic vere habetur generalior magnitudo tensorialis obtemperans variis condicionibus postulatis. Et, si ponitur $\lambda > 0$, servatur forma clausa universi.

Sub aspectu physico λ *compensat pressionem negativam : infert enim vires repulsivas, quae impediunt contractionem propter attractionem newtonianam.*

* Pressio medii est summa trium addendorum : pressio aëriformis — pressio radiationum — vires cohaesivae contrariae.

Peculiares relationes referunt ad invicem novum coëfficientem et alias notas proprias universi statici :

$$\lambda = \frac{1}{R^2} = \frac{4\pi k}{c^2} - \varrho \doteq 10^{-27} \cdot \varrho \qquad \text{(unit. c.g.s.)}$$

Ob suam mensuram minimam, λ non alterat conclusiones quae iam collectae erant ex priori forma aequationis gravitationis (spectantes nostrum systema solare), quibus ipsa relativitas generalis comprobata erat. Etsi minima est mensura coëfficientis λ, vires repulsivae quae opponuntur viribus attractionis sufficientes sunt quae servent aequilibrium universi statici, quia vires illae crescunt proportione directa una cum distantia.

Non obstantibus vero his felicibus congruentiis, coëfficiens λ — ad hoc introductus ut compensaret defectum prioris solutionis — non satis se commendat ; adeo ut ipse Einstein dein illum repudiaverit.

Consideranda nihilominus est prima solutio statica ab Einstein data problemati cosmologico ; iuxta quam solutionem materia universi (seu densitas ϱ multiplicata per volumen hypersphaerae) et dimensio universi (determinata a radio R hypersphaerae) ita commensurantur inter se ut repulsio cosmica adaequet vires attractivas et servetur condicio statica.

Relationes ab Einstein collectae inter varias notas universi statici sunt sequentis typi et ordinis (unit. : c.g.s.) :

$$\lambda = \frac{1}{R^2} = 10^{-27} \cdot \varrho \, ; \qquad \frac{M}{R} = 2 \cdot 10^{28} \qquad (M = 2\pi^2 R^3 \varrho)$$

$$\lambda = \frac{4 \cdot 10^{56}}{M^2}$$

64. Repulsio cosmica et expansio universi.

a. Nova lex einsteiniana de gravitatione et expansio universi.

Character staticus universi einsteiniani videtur prima fronte non congruere cum illo charactere dynamico (universi quod expanditur) quem dein in lucem tulit effectus Hubble ; sed ipse coëfficiens cosmologicus λ — iam introductus ad compensandam pressionem negativam medii — simul paraverat solutionem novae difficultatis.

Etenim : coëfficiens cosmologicus secumfert — ut diximus — vires repulsivas, quae per se aptae sunt ad producendam expansionem universi ; condicio statica servatur quia obstant contrariae vires attractionis ; sed, si aequilibrium inter duas oppositas vires deficit, iam potest determinari expansio universi. Reapse Lemaittre (n. 67) hac ratione perfecit primum opus Einstein ; probavit etiam aequilibrium universi statici einsteiniani non esse nisi instabile, ita ut iam nequeat instaurari si semel deficit ; quare, si quando praestant vires repulsivae, necessario universum evolvitur per continuam expansionem.

Notandum vero est coëfficientem cosmologicum non esse ad hunc finem necessarium : ut Friedmann demonstravit (n. 66) prior forma legis einsteinianae gravitationis (sine λ) potest alia ratione solvi, quae directe ducit ad universum dynamicum quod expanditur.

Einstein probavit novam solutionem Friedmann et repudiavit repulsionem cosmicam tribuendam coëfficienti λ.

Alii vero auctores — praesertim Eddington et Lemaitre — maluerunt retinere coëfficientem cosmologicum. Plures igitur typi universi dynamici considerandi erunt.

b. Phaenomenon expansionis universi.

Datum empiricum consistit in effectu Doppler-Fizeau, qui peculiari ratione afficit radiationes provenientes ex innumeris galaxiis diffusis per spatium : lineae spectrales propriae variorum elementorum transferuntur versum inferiores frequentias colo-

ris rubri ; quae translationes iuxta peculiarem legem producuntur, quam accurate probavit Hubble (quare phaenomenon denominatur effectus Hubble) : quo remotiores sunt galaxiae eo ampliores fiunt translationes linearum ; *stat autem constans proportio inter distantiam galaxiarum et amplitudinem translationis linearum spectri.*

Ut notum est, *effectus Doppler* — qui communis est cuivis motui undulatorio — *explicatur per motum fontis qui producit undas :* prout iste fons undarum appropinquat ad observatorem aut ab eo recedit, subsequentes undae altiori aut inferiori frequentia attingunt observatorem ipsum ; iste propterea phaenomenon percipit perinde ac si modificata esset frequentia naturalis motus undulatorii ; sic altiores fiunt soni si fons sonorus sufficienti velocitate ad nos accedit, dum soni magis graves manifestant motum recessionis fontis sonori. Similiter dicendum est de frequentiis opticis (quae explicatio phaenomeni restat etiam si consideratur natura quantica radiationum lucis).

Estne applicanda eadem explicatio etiam effectui Hubble ?

Si hoc fit, res mira admittenda est : *omnes galaxiae dicendae sunt fugere a nostra galaxia, perinde ac si nos inveniremur in loco medio huius generalis fugae ;* praeterea singulae galaxiae dicendae sunt eo maiori velocitate fugere a nobis quo magis distant : translatio enim linearum spectri definitam proportionem servat cum variis distantiis galaxiarum ; et ipsa translatio eo maior fit quo maior est velocitas recessionis.

Non agitur vero de aenigmatico phaenomeno antropomorphico ; sed omnes distantiae intergalacticae simul augentur pari proportione : consequens est ut omnes galaxiae simul recedant a quovis particulari systemate galactico ; remotiores autem videntur fugere maiori velocitate quia maiores sunt distantiae interpositae quae simul dilatantur. Est ipsum phaenomenon quod producitur si membrana sphaerica elastica inflatur et dilatatur : si supra ipsam superficiem dantur quaedam signa, haec discedunt ab invicem ; omnes eorum mutuae distantiae simul crescunt eadem proportione ac radius sphaerae ; consequens est ut velocitas, qua ipsa signa separantur ab invicem,

crescit una cum eorum distantia (supra superficiem sphaericam) quia ampliores extensiones interponuntur quae pariter dilatantur per idem intervallum temporis. Analogus effectus producitur si plura corpuscula ab uno centro simul proiciuntur in diversas directiones et diversis velocitatibus : etiam in hoc casu quodvis corpusculum ab alio recedit velocitate quae proportionem servat cum interposito intervallo.

Procul dubio phaenomenon generalis fugae galaxiarum, etiam rite intellectum, confundit prima fronte nostras mentes et plures quaestiones movet. Debetne phaenomenon necessario intelligi ut vera fuga galaxiarum ? non enim agitur de consuetis velocitatibus phaenomenorum Doppler-Fizeau (quae non superant 1.000 km/sec), sed de ingentibus velocitatibus quae iam accedunt ad velocitatem lucis ! Relinquenda etiam esset notio de universo firmo stabilique.

Ob has et alias difficultates quaesitae etiam sunt aliae interpretationes phaenomeni empirici (de quibus nobis disserendum non est) ; sed tandem *interpretatio affirmans veram expansionem universi consensum generalem astronomorum obtinuit :* quaedam difficultates dissolutae sunt ; maiores et non solutae difficultates stant contra oppositas interpretationes ; accedunt peculiaria phaenomena quae aliter non intelligerentur ; denique expansio universi — non obstante prima existimatione contraria — bene congruit cum aliis capitibus scientiae physicae et astronomicae.

Omnia igitur studia, quibus proposita est solutio dynamica problematis cosmologici relativitatis, egregie congruunt cum his novis datis experientiae. Notandum etiam est non novas cognitiones astronomicas inspirasse solutiones illas dynamicas, sed illa studia theorica antecessisse experientiam et paravisse schemata apta ad declaranda facta empirica et ad ea in synthesim redigenda.

Notentur, ad hunc propositum, nonnulla tempora : cum astronomus De Sitter (a. 1917) suum studium produxit quo viam aperuit solutionibus dynamicis problematis cosmologici, notatae erant tantum fugae trium galaxiarum. Friedmann (a. 1922) concepit novam solutionem dynamicam aequationis

einsteinianae de gravitatione cum nondum coeptae erant systematicae observationes circa phaenomenon Doppler galaxiarum. Hae observationes assidue peractae sunt inter annos 1924-1928 ; sed iam anno 1927 Lemaitre produxit suam solutionem dynamicam problematis cosmologici antequam statuta esset lex de recessione galaxiarum ; et sic alii auctores (Robertson, Tolman, Eddington, Mc Vittie) inter annos 1929-1930, dum solus Eddington, astronomus, bene noverat phaenomenon fugae galaxiarum.

c. Lex Hubble.

Anno 1928, *Hubble redegit in unam legem omnes observationes circa fugas galaxiarum.* Haec lex dicitur etiam « Hubble-Humason », cum etiam hic alter astronomus suam operam dederit — una cum Hubble — huic investigationi.

Consideratae sunt translationes spectrales plurimarum galaxiarum, quarum distantiae gradatim extollebantur usque ad $100 \cdot 10^6$ ann.-luc. et ultra. Ex translationibus spectri decuctae sunt (iuxta legem Doppler) relativae velocitates recessionis variarum galaxiarum ; quae velocitates comparatae sunt cum distantiis eorundem systematum, et mira congruentia omnes velocitates inventae sunt retinere unam definitam proportionem cum distantiis.

Proportio constans (« *constans Hubble* »), *quam Hubble notavit inter velocitatem fugae et distantiam galaxiarum, est* 170 *km/sec pro* 10^6 *ann.-luc.* (i. e. : velocitas 170 km/sec multiplicanda manet ea ipsa ratione qua distantia cuiusdam galaxiae superat 10^6 ann.-luc. : i. e. : $V_{km/sec} = 170 \cdot r$; unitas ad mensurandam distantiam r est 10^6 ann.-luc.).

Proportio fixa inter velocitatem recessionis et distantiam ($h = V/r$) *denominatur* « *constans recessionis* » *vel simpliciter* « *recessio* » *;* variae autem mensurae indicantur ad designandam eandem « recessionem » pro diversis unitatibus mensurae adhibitis.

Subsequenti tempore lex Hubble et confirmata est et emendata :

— confirmata in primis est quia novae observationes attigerunt galaxias distantes etiam $250 \cdot 10^6$ ann.-luc. ;

— emendata denique est cum recenti tempore (a. 1952) emendatae sunt distantiae tribuendae galaxiis.

Opus non est ut exponamus methodos quibus aestimantur hae altissimae distantiae ; notemus tantum distantias maiores aestimari ex earum comparatione cum minoribus (quae distantiae minores propterea adhibentur ut unitates mensurae) ; iamvero error irrepserat in aestimatione harum unitatum ; qui error validissimis argumentis potuit et notari et corrigi. Pari ratione igitur modificandae erant ceterae distantiae ; quae omnes plus quam duplicatae erant.

Auctis autem distantiis galaxiarum, ratione inversa minuenda erat « constans Hubble » : velocitates enim recessionis (aestimatae ad normam phaenomeni Doppler) sine mutatione retinendae erant ; sed illa velocitas 170 km/sec, quae iam relata erat ad distantiam 10^6 ann.-luc., revera respondebat distantiae altiori ; et si velocitas typica referenda semper erat ad distantiam 10^6 ann.-luc., imminuenda erat velocitas recessionis.

Velocitas recessionis aestimatur hodie :

$$70 \text{ km/sec} \quad \text{pro} \quad 10^6 \text{ ann.-luc.}$$

65. Universum staticum et vacuum astronomi De Sitter.

a. Nova solutio sub nova condicione.

De Sitter (a. 1917) *ostendit aequationes gravitationales problematis cosmologici statici admittere, praeter solutionem Einstein, etiam aliam solutionem si densitas materiae et radiationum supponitur nulla.* Quo in casu, elemento lineari competit sequens forma :

$$\text{(S)} \qquad ds^2 = c^2 \cdot \cos^2\chi \cdot dt^2 - R^2\,(\ldots) \qquad (\chi = \varrho/R)$$

Expressio includenda inter parentheses spectat solas dimensiones spatiales (seu « geometricas »), et ea ipsa est quae apparet in solutione (E) Einstein (cfr. n. 63, b).

Statim colligimus universo mere geometrico competere curvaturam constantem positivam $+1/R^2$ sicut in solutione einsteiniana.

Discrimen vero, distinguens duas solutiones, exprimitur per coëfficientem $\cos\chi$ elementi temporis ; qua de causa toti chronotopo competit curvatura constans negativa $-1/R^2$. Quare chronotopus De Sitter dicitur « hyperbolicus », dum einsteinianus dicitur « cylindricus ».

b. Significatio physica universi vacui.

Universum « vacuum » se exhibet prima fronte ut universum non tantum fictum (sicut universum Einstein), *sed significatione physica destitutum. Nihilominus agnoscenda ei est peculiaris significatio* (et quidem non inutilis) *si consideratur tamquam casus limes ad quem universum physicum asymptotice tendit si expanditur :* materia valde rarefacta iure comparari potest cum vacuo ; et quaeri etiam potest an nostrum universum verum (pro tenui densitate media materiae) assimilandum potius sit universo vacuo De Sitter quam universo pleno Einstein. *Quare De Sitter,* suo studio de solutione statica problematis cosmologici, *viam aperuit investigationibus de solutionibus dynamicis.*

Solutiones dynamicae apparent ut mediae inter duas extremas solutiones staticas possibiles, quae sunt :

— solutio Einstein : exhibens universum plenum, seu repletum tanta materia quanta requiritur ut repulsio cosmica compenset vires attractivas et servet aequilibrium :

— solutio De Sitter : exhibens statum limitem asymptotice assequendum : evanescente enim densitate materiae, deficiunt vires attractivae, et repulsio cosmica (solutio De Sitter servat λ), dominans, nullam aliam solutionem theoretice staticam admittit nisi densitas materiae nulla facta sit.

Confirmant hanc significationem universi De Sitter motus qui per tale universum producuntur si supponuntur in ipsum introductae particulae materiales : hae repelluntur ab invicem vi repulsiva quae crescit una cum distantia. Qua de causa quae-

ritur etiam an ipsum universum De Sitter (etsi exemplar extremum, non verum) aptum sit ad repraesentandum effectum Hubble.

c. De aptitudine universi De Sitter ad exprimendum effectum Hubble.

Haec aptitudo quaerenda est in ipsa expressione elementi linearis. Structura autem huius elementi ostendit phaenomenis dissitis tribui durationem longiorem quam phaenomenis (eiusdem naturae) proximis observatori : ad quam relationem metricam probandam consideratur « tempus proprium » cuiusdam phaenomeni dissiti (quod deducitur ex expressione elementi linearis, dempta tota parte mere spatiali, si eligitur tale phaenomenon cuius initium et finis contingant in eodem loco systematis cuius respectu phaenomenon non transferatur) ; his igitur adiunctis suppositis, phaenomeno dissito systematis $O(\varrho, \theta, \varphi)$ assignatur tempus proprium

$$d\tau = \cos \frac{\varrho}{R} \cdot dt$$

Intervallum autem temporis, proximum observatori O (in origine radiorum) et respondens phaenomeno dissito, est dt ; comparatio denique inter duas mensuras temporis :

$$dt \quad \text{et} \quad d\tau = \cos \frac{\varrho}{R} \cdot dt$$

probat assertum.

Tempus igitur proprium phaenomenorum dissitorum apparet velut lentius factum (dilatatio temporis) ; *et magis ac magis reprimit suum cursum crescente distantia* ϱ*;* adeo ut omnis motus iam appareret ut sistens cum $\varrho = R \cdot \pi/2$ res ($d\tau = \cos\ \pi/2 \cdot dt = 0$) ; consequenter neque possunt percipi positae praeter hunc limitem (« horizontem ») : lux, perinde ac si eius velocitas facta esset nulla ($c \cdot \cos \pi/2$), requireret tempus infinitum.

Potestne his ipsis relationibus metricis dexcribi effectus

Hubble, iuxta quem transitiones intra-atomicae, eo lentiores apparent quo magis distant, determinando imminutas frequentias radiationum ? Ut huiusmodi descriptio statui possit, opus est ut congruentia inter phaenomenon Hubble et proprietates metricas universi De Sitter stet etiam sub aspectu quantitativo.

d. Curvatura propria ipsius spatii vacui.

Curvatura universi statici Einstein definitas relationes habet tum cum densitate materiae tum cum coëfficiente cosmologico :

$$\lambda = \frac{1}{R_o^2} = \frac{4\pi k}{c^2} \varrho$$

Curvatura vero universi De Sitter non est nisi functio magnitudinis cosmologicae λ, *cum densitas materiae facta sit nulla;* stant autem sequentes aequalitates :

$$\lambda = \frac{3}{R_s^2} ; \qquad \varrho = 0$$

Ex his variis formulis deducimus relationem inter curvaturas duorum universorum, necnon inter radios duarum hypersphaerarum :

$$\frac{1}{R_s^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{R_o^2} ; \qquad R_s = R_o \cdot \sqrt{3}$$

Quae omnia dicunt curvaturam spatii sphaerici (tridimensionalis) *imminui quidem deficiente materia, sed non ex toto evanescere.* Quod si attendimus ad curvaturam universi Einstein, ipsam concipimus ut summam duarum partium : altera pars tribuenda est materiae praesenti, altera ipsi spatio curvo ; quare, si vacuum produceretur per quamdam regionem spatii Einstein, curvatura illius loci imminueretur, sed non descenderet infra curvaturam propriam spatii vacui.

Agnoscenda scilicet est quaedam curvatura propria ipsius spatii vacui.

Quae conclusio vero perperam intelligeretur si quaedam curvatura (et quidem curvatura positiva, de qua nunc agitur) *conciperetur ut proprietas necessaria, sequens ipsam naturam spatii :* si haec enim esset vis conclusionis, absurda dicenda essent omnia spatia exhibentia curvaturam nullam aut etiam negativam ; sed tunc, propter nexum logicum quod stat inter tres geometrias, absurda dicenda esset etiam geometria sphaerica, et absurda fierent omnia spatia. (Cfr. ad hunc propositum, quae iam notaverat Taurinus : n. 8).

Sed alia est significatio quae iure tribui potest necessariae curvaturae ipsius spatii ; haec curvatura nullatenus deducta est ex ipsa generali notione spatii ; sed agnita est ut necessaria condicio quae sequitur plures particulares condiciones suppositas.

En variae condiciones previae quae suppositae sunt :

— supposita lege einsteiniana de gravitatione (quae etiam supponit plura data experientiae et nonnulla principia — cfr. n. 62, b, d) ;

— supposita solutione statica (non absolute necessaria) problematis cosmologici (quod etiam positum est sub peculiari forma — postulante densitatem uniformem materiae — quae nequit a priori imponi) ;

— supposita introductione magnitudinis cosmologicae λ (quae etiam secumfert aspectum physicum repulsionis cosmicae);

— supposita nova solutione statica De Sitter ; addita praeterea peculiari relatione inter duas solutiones (universum De Sitter — non obstante aenigmate universi vacui — concipiendum est ut limes versus quem physice evolveretur universum Einstein si deficit aequilibrium) ;

— his omnibus suppositis, spatium tridimensionale dicendum est sphaericum :

quod si sphaericum est, quaedam curvatura positiva ei competit.

66. Solutiones dynamicae problematis cosmologici (Friedmann).

a. Generalis typus solutionis et tres eius formae particulares.

Mathematicus Friedmann (a. 1922) *ostendit aequationem einsteinianam de gravitatione* (*sub priori forma : sine* λ) *posse aliter solvi sub sequentibus condicionibus :*

— *seponitur condicio ab Einstein posita de statica densitate materiae ;* admittitur ex contrario hanc densitatem mutari per tempus ; quare via aperitur ad metricam non stabilem sed variantem per tempus ;

— *densitas* ϱ *materiae* (et radiationum) *potest esse non nulla,* neque hac de causa exstat pressio negativa ;

— *non introducitur consequenter coëfficiens constans cosmologicus* λ *;*

— *semper vero postulatur spatium,* quovis momento temporis, *isotropum et homogeneum ;* et elementum lineare relativitatis particularis constituit casum limitem.

Sub talibus condicionibus (electis aptis coordinatis), *generalis forma elementi linearis est :*

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \frac{R^2(t)}{1 + z/4\,(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)}\,(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2)$$

in qua expressione $R(t)$ *est functio solius temporis : exprimit autem rationem qua variatur per tempus distantia* (relativa : i. e. augmentum distantiae A, divisum per ipsam distantiam A) inter duo puncta materialia ; quare spatium ubique pari ratione simul dilatatur.

Tres autem solutiones particulares distinguuntur prout :

$$z = \begin{cases} +1 \\ \;\;0 \\ -1 \end{cases}$$

Curvatura respondens his variis casibus est :

$$+1/R^2 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad -1/R^2$$

Spatium igitur tridimensionale est (pro iisdem casibus) :

hypersphaera — euclideum — hyperpseudosphaera

Colliguntur scilicet iidem tres typi spatiorum (sphaericum, euclideum, hyperbolicum) ad quos ducit geometria riemanniana cum postulatur isotropia spatii.

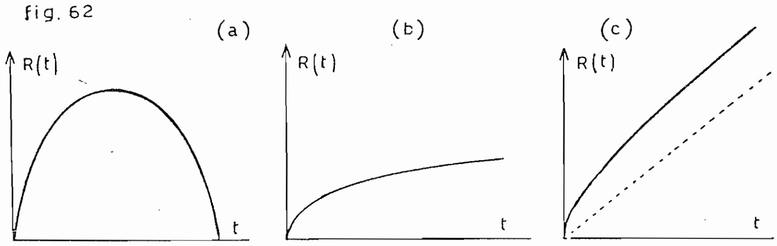
b. Characteres trium solutionum.

1. Characteres diversi.

Characteres proprii uniuscuiusque solutionis distinguuntur pro varia forma tribuenda functioni $R(t)$ elementi linearis, pro tribus casibus $z = +1$, $z = 0$, $z = -1$. Quae forma colligitur ex ipsa aequatione einsteiniana de campo gravitationis, cui coëfficientes elementi linearis obtemperare debent. *Functiones quae colliguntur graphice respraesentantur ut ostendit fig.* 62 :

$z = +1$	$z = 0$	$z = -1$
$K = +1/R^2$	$K = 0$	$K = -1/R^2$

fig. 62



In primo igitur casu (spatii hypersphaerici) universum evolvitur per duas oppositas phases : praecedit expansio, sequitur autem contractio.

In aliis duobus casibus non habetur nisi expansio.

2. Characteres communes.

Omnes formae functionis $R(t)$ — ut ostendunt earum repraesentationes graphicae — *exhibent definitos terminos* $R(t) = 0$

ultra quos evolutio universi non protrahitur: duo termini huiusmodi (initium et finis) competunt primae formae ; ceteris nonnisi initium.

Si attendimus ad formas mathematicas functionis $R(t)$ tales termini reapse necessario admittendi sunt : repraesentatio graphica earundem functionum constanter exhibet suam concavitatem versus rectam $R = 0$, et non admittit ullum minimum aut ullum « punctum inflexionis », quorum gratia evolvi possit ultra dictos terminos.*

Non licet his terminis tribuere — vi theoriae — significationem cuiusdam absoluti initii, aut finis, universi : tractatio enim theoretica problematis cosmologici nonnisi modo valde schematico absolvi potuit : suppositum est universum fictum (uniformi densitate constanter praeditum), et non consideratae sunt omnes causae eius evolutionis (nominatim considerata est sola gravitatio et non actio electromagnetica ; praeterea status hyperdensus universi velut punctiformis facti condiciones novas postulat, quae nos latent. Si igitur tractatio problematis non adaequate adhaeret phaenomeno, nequit omnis nota solutionis theoreticae accipi ut par nota verae evolutionis universi.

c. Solutiones dynamicae comparatae cum datis empiricis.

Aequationes campi gravitationis, ex quibus haustae sunt variae formae functionis $R(t)$, *relationes etiam ponunt inter durationem evolutionis universi, densitatem mediam materiae diffusae per spatium et « recessionem » h* (agitur de ipsa recessione h definita in effecto Hubble : ipsa enim certa ratione nectitur cum functione $R(t)$).

Iamvero haec tria elementa etiam aliunde innotescunt ; quare ea quae a Friedmann praevidentur comparanda sunt cum his notitiis, sive ut comprobetur vis totius theoriae, sive ut eliga-

* Aequationes campi gravitationis, definientes $R(t)$, ostendunt etiam derivatam secundam huius functionis esse constanter negativam, et fieri nullam si $R = 0$. Ex qua condicione colligitur forma quae competit derivatae primae et ipsi functioni $R(t)$.

tur — inter tres solutiones praevisas — ea quae magis consona videtur.

Duratio evolutionis universi congruere debet cum duratione, quam geophysica tribuit terrae (illam deducendo ex disintegratione uranii), *et quam astronomia tribuit stellis* (illam deducendo ex processu transformationis hydrogenii in helium). Hae autem aestimationes attingunt ordinem $3 \div 5 \cdot 10^9$ annorum.

Duratio autem expansionis universi deduci potest ex theoria Friedmann quatenus ipsa duratio definitas relationes habet (pro variis solutionibus problematis) cum recessione h, et quatenus de ipsa recessione habemus mensuras experimentales. Colliguntur autem sequentes aestimationes :

(casus sphaericus)	(casus euclideus)	(casus pseudosphaericus)
$2{,}5 \cdot 10^9$ ann.	$3. \cdot 10^9$ ann.	$4{,}5 \cdot 10^9$ ann.

Hae aestimationes manifesto admittunt — congruenter cum ipsa theoria — variationes non parvas ; quia theoria (ut iam notavimus) modo nimis schematico tractat phaenomenum cosmologicum et non potest illud reproducere nisi grosso modo.

Concludimus igitur theoriam Friedmann satis congruere cum notitiis geophysicis et astronomicis. Praeferenda videtur tertia solutio (typi hyperbolici) ; sed, ob rationes dictas, neque prima solutio (typi sphaerici) absolute excludi potest.

Argumentum colligitur etiam ex comparatione inter theoriam et notitias quas habemus de densitate media ϱ materiae universi et de recessione h.

Iuxta theoriam Friedmann, forma agnoscenda universo

est :	hypersphaerica	euclidea	hyperpseudosphaerica
prout :	$\frac{\varkappa\varrho}{3} - h^2 > 0$	$\frac{\varkappa\varrho}{3} - h^2 = 0$	$\frac{\varkappa\varrho}{3} - h^2 < 0$

Iamvero, congruenter cum recentioribus investigationibus circa massas galaxiarum, ponitur :

$$\varrho = 10^{-29} \text{ gr/cmc}$$

— mensura tribuenda recessioni h (ratione habita de emendatis aestimationibus distantiarum) est :

$$h = 2{,}4 \cdot 10^{-28} \qquad \text{(unit. c.g.s.)}$$

— tandem coëfficienti $\varkappa$ aequationis einsteinianae (nexo cum coëfficiente k gravitationis universalis) spectat mensura :

$$\varkappa = 1{,}86 \cdot 10^{-27} \qquad \text{(unit. c.g.s.)}$$

quare colligitur :

$$\frac{1}{3}\varkappa\varrho - h^2 = 0{,}6 \cdot 10^{-56} - 5{,}6 \cdot 10^{-56}$$

Etiam hoc argumentum favet magis tertiae solutioni pseudosphaericae.

Tamen haec conclusio — animadvertit ipse Einstein — manet obnoxia revisioni : poterunt novae indagationes revelare maiores massas obscuras materiae ; crescente autem densitate media ϱ, possunt inverti relationes inaequalitatis. Ex contrario, si quando poterit probari talis densitas ϱ quae superet $3h^2/\varkappa$, solutio sphaerica iam firmiter stat.

*G. Armellini exhibuit hoc ipsum argumentum sub forma aequipollenti, sed magis simplici et perspicua.**

Comparavit velocitatem V recessionis galaxiarum cum velocitate W quae dicitur « critica » : agitur de ea velocitate quae, si superatur a corpore discedente a massa M quae illud attrahit, efficit ut energia cinetica corporis fugientis superet attractionem ita ut corpus semper magis discedat a massa M, neque regrediatur.

Iamvero, pro definitis relationibus quibus V refertur ad h et W ad k, ϱ, ipsae conclusiones theoriae Friedmann (de quibus nunc egimus) novam expressionem acquirunt ; scilicet: solutio problematis cosmologici

---

* *Cinquant'anni di relatività* : G. Armellini, *La teoria della relatività nell'astronomia moderna.*

Auctor tractat problema adhibendo formulas mechanicae classicae et non schemata relativitatis ; quod tamen iure fit, cum agatur de comparandis peculiaribus magnitudinibus, quarum mutuae relationes relativisticae nequeunt multum discrepare a mensuris classicis (cfr. n. 62, d, 6)

est :	sphaerica	euclidea	hyperbolica
prout :	$W > V$	$W = V$	$W < V$

Ipsae autem relationes inter W et ϱ, k dant :

$$W = 22 \cdot r$$ (unitas manstrae ad mensurandam distantiam r est 10^6 ann.-luc.)

Velocitati vero galaxiarum competit sequens mensura :

$$V = 70 \cdot r$$

Concludimus velocitatem galaxiarum saltem triplicare velocitatem criticam : recedent igitur, neque regredientur. Eandem conclusionem probant studia circa energiam cineticam universi siderei adscribendam motibus galaxiarum et stellarum : valde maior est quam potentialis gravitationis propter mutuam attractionem massarum ; saltem si densitas media tributa materiae universi non multum discrepat — ut probandum videtur — a vera densitate.

Hoc argumentum (una cum praecedentibus) *excludit formam hypersphaericam universi, si tamen problema cosmologicum ponitur et solvitur iuxta methodum Friedmann. Nova vero solutio, elaborata a D. Lemaitre* (de qua statim dicemus), admittit fugam galaxiarum (quae iam fit sine possibilitate regressus), sed hoc phaenomenon componit cum forma hypersphaerica universi.

67. Solutio mixta D.ni Lemaîttre.

a. Universum Einstein basis novae solutionis.

D. Lemaîttre (a. 1927), cum iam innotescere coeperant investigationes astronomicae circa communem fugam galaxiarum, quaesivit exemplar universi — non statici — quod aptum esset ad describendam et explicandam recessionem corporum dissitorum. Adhibuit vero ad hunc finem illud ipsum exemplar staticum universi, quod Einstein elaboraverat adiciendo coëfficientem constantem λ inferentem repulsionem

cosmicam. Ceterum auctores magni nominis, ut Weyl et Eddington, iam includerant λ in serie constantium naturalium. Apta etiam visa erat repulsio cosmica ad declarandam causam recessionis galaxiarum.

Notavit autem *Lemaîttre condicionem staticam universi Einstein revocandam esse ad aequilibrium instabile,** *quod — si quando deficit — iam nequit redintegrari ; quare bene poterant simul componi universum Einstein et phaenomenon recessionis galaxiarum.*

Lemaîttre, retinens illum coëfficientem λ quem Einstein adiecerat ut compensaret pressionem negativam, posuit nihilominus summam pressionum esse nullam (negligendo pressionem nebulae cosmicae et radiationum) ; quae positio, etsi non exacta, admitti potest ut hypothesis approximata.

b. Universum Einstein stadium superatum evolutionis universi.

Supposuerat initio Lemaîttre universum Einstein constituisse primam formam quam universum retinuit per durationem indefinitam ($R_0 =$ const.) ; contigit vero aliquando (circiter abhinc $5 \cdot 10^9$ annorum) ut, deficiente aequilibrio, coepta sit expansio.

Dein vero Lemaîttre admisit etiam praecedentem phasem expansionis, quae initium duxerit a statu primo hyperdenso (*quasi punctiformi*) *totius materiae universi ;* quam massam concentratam denominavit « atomum » initialem vel « neutron » initiale. Quaedam titanica explosio radioactiva initium dedit primae expansioni ; cum vero, pro altissima densitate materiae, adhuc praestaret vis attractiva, motus frenatus et retardatus est. Attingente denique universo dimensionem R_0 universi Ein-

---

* Si aequilibrium supponitur stare, variatio (vel artificialis) radii universi obtemperare debet sequenti legi :

$$3\,R'' = R\,(\lambda - 4\pi\varrho_0) \qquad \text{(unitates relalivistae)}$$

in qua formula R'' (derivata secunda radii R) exprimit rationem — non uniformem — qua pergit variari R. Stante aequilibrio ($R = R_0$; $\varrho_0 = \lambda/4\pi$) $R'' = 0$. Sed si, quavis de causa, ϱ decrescit (R dilatatur), $R'' > 0$; i. e.: nova expansio sequitur. Item dicendum si ϱ crescit: universum contrahitur.

stein, quidam impulsus adhuc supererat; quare, impedito aequilibrio, altera phasis expansionis coepta est. Nunc autem temporis velocitates galaxiarum adeo altae sunt ut gravitatio iam nequeat frenare earum fugam.

Non sine argumentis Lemaîttre construxit talem evolutionem universi: manent enim etiam hodie vestigia cuiusdam status initialis hyperdensi. Argumenta a Lemaîttre adhibita revocantur ad tria capita:

— radii cosmici et eorum proprietates;

— homogeneitas materiae per universum et generalis condicio processuum radioactivorum;

— degradatio et velut in pulverem contusio energiae per tempus.

Non omnes hae argumentationes obtinuerunt consensum physicorum et astronomorum; communiter vero astronomi admittunt tum hyperdensum statum initialem universi (quem postulat etiam theoria Friedmann-Einstein) tum vestigia adhuc permanentia illius remotissimi status. Communiter denique theoria Lemaîttre cum laude excipitur, saltem ut studium praestantius et magis completum inter varia studia quae retinuerunt coëfficientem λ.

Peculiarem attentionem meretur argumentatio, qua Lemaîttre ex analysi radiorum cosmicorum coniecit sive explosionem atomi initialis sive formam sphaericam spatii. Perpendens enim ingentes et intensissimas copias energiae, quas possident hae radiationes, exclusit ipsas provenire posse ex aliis consuetis fontibus energiae. Consideravit denique permanentiam et distributionem isotropam eorundem radiorum: conclusit illos replevisse spatium in seipsum clausum, quod initio etiam pluries percurrerunt; nunc vero, propter expansionem ipsius spatii, iam nequeunt absolvere eius gyrum, sed ubique manent et in omnes directiones procedunt tamquam testes status initialis et formae universi.

c. Dimensiones universi.

Theoria Lemaîttre contributionem affert ut possimus aestimare magnitudinem universi (admissa eius forma hypersphaerica).

Iam theoria Einstein posuerat tres relationes independentes inter quatuor magnitudines, quae sunt:

— R_o (radius universi statici Einstein)
— M (massa totius universi)
— ϱ_o (densitas media materiae, in ipso universo statico)
— λ (coëfficiens constans cosmologicus).

Si vel una ex istis magnitudinibus aestimari potest, ceterae colliguntur ex earum mutuis relationibus (cfr. n. 63, c).

Iamvero theoria Lemaîttre relationem ponit inter radium R_o universi Einstein et altiorem limitem quem attingere potest « recessio » h galaxiarum : $R_o = 1/h_{lim} \cdot \sqrt{3}$.*

Absonum autem non est assumere ipsam hodiernam recessionem h (quam hodie colligimus ex mensuris circa fugam galaxiarum) tamquam expressionem limitis superioris recessionis: densitas enim media quae hodie tribuitur materiae (10^{-29} gr/cmc) ea ipsa est quam producunt 6 atomi hydrogenii per m^3; fortasse « recessio » potest adhuc augeri sua decima parte.

Definito aliquomodo limite superiori recessionis, statim colliguntur R_o, M, ϱ_o.

Si negligitur emendatio afferenda recessioni h iam aestimatae a Hubble (quod utiliter fit ut conclusiones dein comparentur cum analogis positionibus theoricis astronomi Eddington), colliguntur sequentes aestimationes:

$$R_o = 10^{27}\ \text{cm} = 10^9\ \text{ann.-luc.}$$
$$M = 2 \cdot 10^{55}\ \text{gr} = 10^{22}\ \text{soles}$$
$$\varrho_o = 10^{-27}\ \text{gr/cmc}$$

Consequenter aestimare possumus praesentem extensionem universi, comparando densitatem mediam ϱ_o universi

* Haec relatio omnino congruit cum relationibus quae deducuntur ex theoria De Sitter:

$$h = 1/R_s\,; \quad \lambda = 3/R^2_s = 1/R_o^2\,; \qquad R_s = R_o \cdot \sqrt{3} \quad (R_s = \text{radius universi De Sitter})$$

Quare etiam concludimus universum De Sitter exprimere terminum versus quem evolvitur universum Lemaîttre.

Einstein cum densitate media quae hodie (accurate perpensis omnibus adiunctis et hypothesibus probabilibus) agnoscitur densitati mediae materiae. Haec enim densitas media est $\varrho = 10^{-29}$ gr/cmc ; iam igitur universum ita expansum est ut eius volumen aequet 100 volumina universi Einstein ; radius propterea fere quintuplicatus est, et attingit ordinem $5 \cdot 10^9$ ann.-luc. ; distantia igitur inter antipodes (πR) attingit ordinem $16 \cdot 10^9$ ann.-luc. Potentiores telescopii attingunt tantum vigesimam partem huius distantiae ; quare explorata est sola millesima pars spatii hypersphaerici.

Etiamsi hae aestimationes supponantur grosso modo approximatae (errores attingant ex. gr. 30 %), mirae notitiae iam possidentur.

Quoad durationem universi Lemaître distinguit tres periodos :

— prima periodus : inter explosionem atomi initialis et statum fere staticum universi Einstein : expansio rapida sed frenata ;

— secunda periodus : universum permansit in aequilibrio proprio universi Einstein ;

— tertia periodus : deficiente aequilibrio, expansio accelerata producta est propter repulsionem cosmicam superantem gravitationem.

Opus non est ut consideremus et perpendamus argumenta quibus innixus Lemaître tribuit tribus periodis simul sumptis etiam durationem 10^9 annorum $(2 + 5 + 3)$; notemus tantum hanc theoriam sinere durationes maiores quam theoriam Friedmann-Einstein.

d. Sententia astronomi Eddington.

Eddington, cuius iudicio Lemaître primo subiecerat suum opus, valde illud probavit et laudavit.

Initio sententiae duorum auctorum plane congruebant : Eddington tenebat (et semper dein tenuit) universum Einstein constituisse primam formam universi ; et Lemaître nondum cogitaverat de prima phase evolutionis universi, anteponenda universo einsteiniano.

Eddington perseveranter stetit pro prima sententia Einstein, etiam cum ipse auctor eam iam repudiaverat : maxime ei probabatur magnitudo cosmica λ, quam annumeraverat (tamquam magnitudinem ipsa natura definitam) ceteris magnitudinibus constantibus physicae (quales sunt ex. gr. : $c =$ velocitas lucis ; $k =$ constans gravitationis universalis ; $e =$ onus electricum elementare ; $h =$ quantum actionis ; . . . . .). Quare etiam — ad opinionem Eddington — quaestio poni non poterat nisi de uno coëfficiente λ : dum alii cosmologi, disputantes de variis possibilibus formis et evolutionibus universi, varias hypotheses posuerunt etiam circa λ ($\lambda \gtreqless \lambda_o$; $\lambda < 0$), Eddington censuit λ amittere suam significationem physicam si discreparet a λ_o universi statici Einstein. Admisso enim — ait Eddington — spatio curvo et eius radio R curvaturae, iam definita manet magnitudo constans cosmica λ_o et relativa repulsio cosmica : nonnisi $\lambda_o = [\pi c^2/4kM]^2$ possibilem reddit aequilibrium universi.

Eddington persuasum habuit arctam et logicam relationem referre ad invicem magnitudines constantes macrocosmi et magnitudines constantes microphysicae ; quare concepit ambitiosum propositum detegendi constantes universi procedendo ex speculationibus circa constantes microphysicae.

Hac metodo, a. 1944, definivit mensuram limitem agnoscendam recessioni h ; collegit autem numerum proximum illi a Hubble empirice aestimato (qui numerus vero, innixus erratis aestimationibus distantiarum, plus quam dimidiandus fuit). Quoad alias praecipuas magnitudines universi Eddington obtinuit :

$$R_o = 9{,}335 \cdot 10^{26}\ \text{cm}$$
$$M = 1{,}977 \cdot 10^{55}\ \text{gr}$$
$$\varrho_o = 1{,}231 \cdot 10^{-27}\ \text{gr/cmc}$$

quae conclusiones etiam mire congruunt cum illis iam antea notatis et definitis methodo theorica-experimentali ; deficit vero par congruentia cum natura rerum, quia modificandi sunt omnes isti numeri sicut emendata est recessio h.

Ceterum *physici ut plurimum nullam fiduciam ponunt in talibus rationibus concipiendi* (*nimis a priori*) *et in praestitutis harmoniis inter numeros.*

68. Conclusiones pro statu hodierno astronomiae.

Astronomi, consensu fere unanimi, censent effectum Hubble renuntiare veram expansionem universi; quare galaxiae fuerunt olim valde proximae inter se; circiter quinquies millies millena millium annorum ($5 \cdot 10^9$) postulantur ut produci potuissent distantiae intergalacticae quas nunc conspicimus.

Alia quoque phaenomena, terrestria et sideralia (elementa radioactiva in rupis; processus nucleares per quos sol et stellae irradiant energiam; quaedam systemata stellarum et formae galaxiarum), postulant peculiarem evolutionem universi, cuius duratio aestimari etiam potest eiusdem ordinis $5 \cdot 10^9$ annorum.

Accedunt phaenomena (inter quae radii cosmici) quae videntur renuntiare quemdam primitivum statum hyperdensum totius materiae cosmicae, mirum in modum in uno loco contracta.

Huic initio evolutionis cosmicae nequit tribui — vi argumentorum scientificorum — significatio cuiusdam initii absoluti universi (quod consequenter postularet actum creativum); tamen scientia physica et astronomica neque valet hodie — suis methodis — superare hunc remotissimum limitem et delineare aliam praecedentem phasem evolutionis universi.

Cum his studiis astronomicis egregie congruunt studia theoretica, quae — originem ducendo ex solidis positionibus theoriae relativitatis — investigant de forma totius universi: iuxta methodos proprias theoriae relativitatis, eminet vestis geometrica harum investigationum.

Pro auctoritate qua pollet theoria relativitatis, haec studia — communi consensu astronomorum — magni fiunt. Quamvis autem directe produxerint descriptiones cuiusdam universi idealis (in quo densitas materiae et irradiationum facta sit uniformis), nihilominus condiciones verae universi non adeo

ab illis fictis condicionibus discrepant ut descriptiones theoreticae non valeant etiam adumbrare formam veri universi galaxiarum.

Quoad indolem geometricam universi (agitur vero de geometria non abstracta, sed cui competit significatio physica), distinguendae sunt conclusiones spectantes totum universum et conclusiones spectantes particulares regiones prope ingentes massas materiae.

Hae conclusiones magis particulares iam firmiter stant : prope materiam mensurae non congruunt cum regulis metricis geometriae euclideae. Quaestio vero de forma totius universi adhuc aperta manet ; et in praesenti — postquam varia studia theoretica producta sunt — totis viribus insistendum est in observationibus astronomicis.

Videtur nihilominus excludenda illa forma sphaerica quae — seposito factore cosmologico λ — exhibita est a Friedmann tamquam una ex possibilibus solutionibus aequationis einsteinianae de gravitatione : haec enim solutio infert duplicem phasim in evolutione universi : fit prius expansio, sequitur contractio : iamvero nec prior phasis videtur sibi vindicare sufficientem durationem, nec subsequens phasis videtur congruere cum praesenti statu universi, cuius velocitas expansionis superat velocitatem criticam quae sinat regressum.

Theoria D.ni Lemaîttre multis valde probatur : plus quam ceterae valet explicare maiorem durationem expansionis universi ; ipsa theoria praeterea plura phaenomena et physica et astronomica in synthesim colligit. Non omnia vero argumenta Auctoris omnibus astronomis probantur ; nominatim adhibet factorem cosmologicum circa quem dantur opinione oppositae.

Etiam aliae theoriae recentiori tempore productae sunt*,

---

* Tres theoriae notandae veniunt, quarum auctores sunt Milne, Hoyle (necnon alii eiusdem sententiae : Lyttleton, Bondi, Gold ...), Jordan (cfr. quae de his cosmologiis dicunt Couderc, Whitrow : v. bibliographiam).

a. Principia quibus Milne usus est dicenda sunt idealia, artificiosa et arbitraria ; ducunt etiam (ut animadvertunt ipsi periti in hac materia) ad positiones contradictorias.

b. Theoria Hoyle non sine rumore et admiratione divulgata est

quae dici possunt heterodoxae respectu theoriarum (Einstein-De Sitter-Friedmann-Lemaîttre) quae magis inhaeserunt fundamento theoriae relativitatis. Sed hae novae theoriae (quae

---

quia affirmat rem plane novam et inopinatam : continuam scilicet creationem materiae ; auctor autem non agnoscit Creatorem : proprium est materiae creari (sic, olim saltem, sententia proposita est).

Universum exhibetur ut infinitum tum in sua extensione tum in sua duratione ; nec praevidetur eius evolutio versus aequilibrium thermodynamicum : ipsa enim materia ex novo creata invariatam servat summam « entropiae » totius universi. Huic universo aptatur metrica De Sitter.

Si duratio universi dicitur infinita, vita singularum galaxiarum exhibetur ut finita : admittenda autem est ingens copia materiae invisibilis, centies aut millies abundantior quam materia visibilis : haec materia sine fine coagmentatur ad producendas novas galaxias, dum galaxiae seniores cerni desinunt propter expansionem universi. Structura singularum galaxiarum variatur una cum earum aetate ; sed, per totum universum, habetur par distributio diversorum typorum galaxiarum, seu galaxiarum diversarum aetatum.

Fundamentum huius generis universi stat in mera petitione principii : postulatur scilicet ut universum — non obstante eius expansione — sine variatione retineat eandem speciem intra ambitus proprios observationis astronomicae ; quare requiritur (sub specie conclusionis, sed revera ut merum postulatum) ut invariata permaneat densitas media materiae ; ad quam densitatem servandam (stante expansione universi) nova materia creari debet. Requiritur autem — stante recessione Hubble — creatio unius nucleonis per litrum et per 10^9 annos.

Astronomi, adunati in conventu internationali (in Civitate Vaticana — a. 1957), praesente ipso Hoyle, non multi fecerunt hanc constructionem theoreticam, utpote non innixam datis empiricis, immo contrariam : nequeunt enim admittere tantam copiam materiae invisibilis. Nec desunt absurda philosophica si creatio materiae admittenda esset sine actione Creatoris. Inter cetera, dicenda esset summa Divinitas (seu ens absolutum quod per se stat) densitas media materiae (i. e. ens relativum et dependens et non ens absolutum).

c. Pasqualis Jordan construxit suum universum considerando peculiares proportiones numericas (i. e. : coëfficientes mere numericos, destitutos dimensione physica) vigentes inter praecipuas magnitudines physicas, quae sunt : velocitas lucis, coëfficiens gravitationis (relativitatis), aetas maxima stellarum (seu aetas universi), recessio Hubble, densitas media universi (ratione habita de solis Galaxiis), et coëfficiens quidam R qui partem habet in recensenda densitate galaxiarum (R autem exprimit ipsum radium universi si universo competit forma hypersphaerica).

Iamvero Jordan notavit omnes possibiles combinationes (per productum aut divisionem) harum magnitudinum, quae componant purum numerum (destitutum dimensione physica), esse tantum tres et pariter dare numeros parvos qui sunt eiusdem ordinis ac unitas (1, 7 ; 1 ; 1, 8). Quam congruentiam Jordan non tribuit casui, sed habuit pro signo manifestante structuram propriam universi.

Ex analysi harum relationum Jordan nonnullas conclusiones collegit :

nequeunt hic breviter declarari) consensum astronomorum non obtinuerunt, neque vera auctoritate pollent : innituntur enim principiis nimis idealibus, non satis inhaerentibus fundamentis empiricis ; etiam attingunt conclusiones quae neque sibi cohaerent neque cum observationibus et methodis astronomorum.

Ceterum haec studia manent extra ambitum nostri propositi : considerandae nobis sunt variae geometriae non euclideae, et varii possibiles typi universi physici, quorum descriptio absolvatur schematibus geometriae non euclideae.

— radius R universi crescit ipsa velocitate lucis ;
— radius universi erat fere nullus abhinc 3 aut $4 \cdot 10^9$ annos ;
— summa energiae universi est nulla : quatenus pars positiva energiae materiae compensat partem negativam energiae potentialis omnium siderum ;
— massa universi crescit sicut potentia secunda aetatis eiusdem universi.

Hanc ultimam conclusionem vero Jordan non collegit nisi postulando invariatam permansionem cuiusdam peculiaris aequalitatis quae hodie notari potest inter quasdam magnitudines physicas ; scilicet : eiusdem ordinis sunt (ut 10^{40}) proportio inter vires attractivas electricas inter proton et electron et vires attractivas gravitationis newtonianae inter easdem particulas ac proportio inter radium R universi et radium r protonis :

$$F_e/F_n \sim R/r \sim 10^{40}$$

Iamvero, si huiusmodi relatio invariata permanere debet crescente radio R universi, opus est ut simul decrescat coëfficiens gravitationis (qui antea censebatur constans) ; tandem — pro relationibus quibus referuntur ad invicem coëfficiens gravitationis, aetas, massa et radius universi, colligitur lex qua crescit massa universi ; quae massa (quae hodie aestimatur ut 10^{56} gr $= 10^{80}$ nucleona) constanter referri potest ad dictas proportiones ; scilicet :

$$F_e/F_n \sim \sqrt{N} \sim R/r \sim 10^{40} \qquad (N = \text{numerus nucleonum})$$

PARS IV

De nonnullis quaestionibus philosophicis nexis cum problemate de geometria non euclidea

A. - PROBLEMA LOGICUM

I

69. Potestne postulatum V euclideum logica demonstratione colligi ex praecedentibus propositionibus principiorum Euclidis?

Hoc fuit primum et saeculare problema positum circa vim geometriae euclideae.

Responsionem non dubiam et completam primo dederunt variae interpretationes tridimensionales geometriarum non euclidearum :

late disseruimus de repraesentationibus conformibus spatiorum non euclideorum ; satis etiam diximus (ad praesentem quaestionem declarandam) de repraesentationibus iuxta methodos geometriae proiectivae.

Hae interpretationes geometriarum non euclidearum componunt omnes propositiones euclideas (quae praecedunt postulatum V) cum propositione opposita eidem postulato ; agitur autem de systematibus quae certe gaudent interna congruentia (cfr. n. 56).

Concludimus igitur primas positiones principiorum Euclidis non sufficere ut demonstretur postulatum V : possunt enim logice componi etiam cum propositione contraria.

Notandum est dictas interpretationes geometriarum non euclidearum tribuere definitam significationem omnibus et singulis proprietatibus quae explicite enunciantur inter principia Euclidis (excepta sola proprietate de recta infinita si agitur de geometria elliptica). Quare, etiamsi quis dicat — ad mentem Euclidis — annumerandas esse propositionibus explicite enunciatis alias condiciones tacite intellectas (ducentes ad unum systema euclideum), non infirmatur responsio data nostro problemati logico : quaesitum enim erat de possibilitate demon-

strandi postulatum V argumentis haustis ex solis proprietatibus et condicionibus explicite enunciatis. Ulterior analysis quaestionis nos ducet ad etiam definiendas condiciones addendas primis positionibus Euclidis ut logice sequatur solum systema euclideum.

Non pari efficacia declarant positum problema logicum :

— *trigonometria hyperbolica,* constructa a primis auctoribus geometriae non euclideae : Gauss, Lobačewski, Bolyai ;

— *pseudosphaerae,* quibus Beltrami exhibuit interpretationem trigonometriae hyperbolicae ;

— *ipsa geometria riemanniana,* si tantum attendimus ad primas eius positiones definientes varietates analyticas et earum regulam metricam.

Rationes, ob quas delimitatur vis horum argumentorum, ad sequentia capita revocantur : hae tractationes :

— *aut exhibent systema mere analyticum,* neque satis declarant an ipsae relationes analyticae exprimere etiam valeant relationes metricas inter extensiones spatiales ;

— *aut exhibent systemata mere bidimensionalia,* necnon limitata ;

— *aut enunciant solas proprietates metricas et non proprietates topologicas.*

Argumentatio vero omnibus punctis absoluta (quae ostendat ex nullo capite derivari posse internam contradictionem systematum non euclideorum, quantumvis evolvantur eorum logica consectaria) *considerare debet :*

— *systemata stricte geometrica* (constituta scilicet extensionibus spatialibus) ;

— *spatium tridimensionale ;*

— *omnes proprietates metricas, sed etiam topologicas :* rationes scilicet quibus regiones spatii, praeditas illis proprietatibus metricis, evolvi et connecti possunt inter se ad constituendum integrum spatium.

His condicionibus prae oculis habitis, facile apparet indoles incompleta trium argumentorum particularium, de quibus mentio facta est.

Etenim :

— trigonometria hyperbolica (a Gauss, Lobačewski, Bolyai definita) directe constituit systema analyticum formularum; quod systema deductum quidem est ex considerationibus geometricis circa spatium tridimensionale, sed tandem comprobatum est constituere systema logice cohaerens tantum ut systema analyticum bidimensionale (propter eius logicum nexum cum systemate formularum trigonometriae sphaericae, constructae sine ullo auxilio postulati V — cfr. n. 10, b, n. 11).

— pseudosphaerae sunt quidem entia geometrica veri nominis, sed tantum bidimensionalia, et etiam necessario limitata.

— principia geometriae riemannianae spectant spatia non solum tridimensionalia, sed etiam n-dimensionalia, sed directe agunt de systematibus analyticis (puncta spatii sunt collectiones n numerorum; distantia inter duo puncta definitur per peculiarem formulam); spectant denique directe solas proprietates metricas (quae solae definiuntur per formulas geometriae differentialis); ascendendum restat, per processus integrationis, ex proprietatibus ambituum infinitesimorum ad proprietates totius spatii, ut ratio habeatur etiam de proprietatibus topologicis (v. n. 71).

Sine ulla limitatione vero solvunt problema logicum repraesentationes tridimensionales spatiorum non euclideorum:

exhibent enim entia non mere analytica, sed geometrica (extensa), interpretantia omnes proprietates metricas et topologicas spatiorum non euclideorum tridimensionalium; considerant denique tum geometriam hyperbolicam tum geometriam ellipticam.

Interpretationes spatiorum non euclideorum peractae iuxta methodos geometriae proiectivae praestantiores dicendae sunt quam repraesentationes conformes:

— istae artificiose constructae sunt, et prius consideratae sunt ut imagines spatiorum non euclideorum, et dein etiam in seipsis ut entia geometrica non euclidea (cfr. n. 56).

— varia vero systemata geometriae proiectivae, non artificiose elaborata sunt ut constituerent imagines spatiorum non euclideorum, sed peculiari methodo exhibent problemata geometrica, referendo (definitis regulis) proprietates metricas ad

peculiaria entia absoluta, quae invariata manent per varias operationes geometriae proiectivae; pro varia autem specie « absolutorum » colliguntur tres typi geometriarum, quae plane congruunt cum geometriis elliptica, euclidea et hyperbolica. Quare haec systemata dicenda sunt per seipsa et directe constituere omnem speciem geometriae(cfr. nn. 51, 53).

Nihilominus tum geometria proiectiva tum repraesentationes conformes spatiorum non euclideorum pares dicendae sunt quoad aptitudinem declarandi et solvendi problema logicum geometriae euclideae et non euclideae.

II

70. Proprietates addendae principiis Euclidis (dempto postulato V) ut dein construi possint - sola logica deductione - varia systemata geometrica.

Ut in praecedenti paragrapho declaratum est, principia Euclidis (dempto postulato V) non ponunt sufficientia praemissa logica ex quibus necessaria deductione eruantur systemata euclidea aut non euclidea. Quaerimus igitur quaenam alia principia addenda sint ut constituantur sufficientia fundamenta logica variarum geometriarum.

Obviam responsionem colligimus ex tota nostra tractatione de variis geometriis ; scilicet :

definiendae manent regulae ad aestimandas distantias : variae enim geometriae sequuntur varias regulas metricas.

Illustrant hanc affirmationem omnes partes tractatae :

— repraesentationes conformes constituunt interpretationes diversorum entium geometricorum (euclideorum et non euclideorum) pro diversis regulis metricis statutis ;

— geometria proiectiva diversas formas induit (euclideas et non euclideas) pro diversa ratione qua statuuntur regulae metricae ;

— geometria riemanniana (cuius Auctor novam basim ponere voluit quae obviaret defectibus principiorum Euclidis) tota est in definienda generaliori forma tribuenda regulae me-

tricae, quae etiam determinaret — pro variis suis formis particularibus — omnem typum geometriae.

— spatia physica theoriae relativitatis referunt diversas proprietates spatii ad diversas regulas metricas expressas per varia elementa linearia.

Hae animadversationes efficaciter etiam declarant problema logicum de quo iam dictum est in praecedenti paragrapho. Etenim : linea recta ita describitur per principia Euclidis ut de ipsa (congruenter cum communi sensu hominum) concipiatur idea lineae minimae distantiae ; definienda igitur restat ipsa distantia (non per conceptum lineae rectae, ut vitetur circulus vitiosus) et ratio qua distantia aestimatur ; pro diversis autem rationibus quibus legitime statui potest regula metrica, colliguntur diversae proprietates rectarum et consequenter diversa systemata geometrica.

Addito complemento de regula metrica, absolvuntur principia systematis geometrici.

Tale complementum dicendum est in primis sufficiens : ipso enim admisso, iam absolvi possunt (logica deductione) omnes possibiles geometriae.

Sed dicendum etiam est complementum necessarium, saltem implicite definiendum : proprietas enim quae distinguit varias geometrias est curvatura ; curvatura autem colligitur ex regula metrica.

Quare postulatum V Euclidis potest etiam concipi ut definitio implicita regulae metricae euclideae : postulatur scilicet talis regula metrica quae tandem ducat ad ipsas proprietates quae per postulatum enunciantur, et ad omnes eius consectaria. Definitio vero indirecta et mere implicita non constituit optimam redactionem logicam principiorum ; etiam quia declaranda est — quantum fieri potest — mutua congruentia logica inter varia principia.

III

71. Curvatura, quae est nota propria cuiusvis geometriae non euclideae, postulatne ut spatium tridimensionale concipiatur flexum respectu quartae dimensionis?

Huic quaestioni diversae responsiones competunt pro variis modis quibus constitui possunt spatia non euclidea. Ut divisio diversorum casuum sit manifesto adaequata, distinguamus spatia geometrica exhibentia characterem homogeneitatis et isotropiae, et spatia quae tali proprietate non gaudent.

Usquedum agitur de entibus geometricis non exhibentibus structuram homogeneam et isotropam, nullam necessitatem experimur adhibendi flexionem spatii respectu quartae dimensionis ut intelligamus proprietatem curvaturae. Curvatura enim apparet ut proportio inter excessum geodeticum triangulorum et aream figurarum; sine ulla autem difficultate et admiratione concipimus talem proportionem variari posse si supponuntur regulae metricae non homogeneae aut non pares in omnes directiones; tunc (ut iam declaratum est — cfr. nn. 28, 56) colliguntur mensurae variae, perinde ac si adhiberentur unitates mensurae elasticae, quae varie dilatarentur et contraherentur; et pari ratione variari possunt mensurae et earum mutuae relationes si, ad constituendam regulam metricam, partem habent varii factores physici, praeter puram extensionem.*

Potest quidem curvatura spatii illustrari, etiam in his adiunctis per internas relationes metricas, quas exhibent entia geometrica curva; sed huiusmodi comparatio facile institui potest usquedum agitur de entibus mere bidimensionalibus (concipiendae tunc sunt superficies curvae respectu tertiae dimen-

* Notemus conceptum extensionis praecedere definitionem regulae metricae; regula enim metrica statuitur ad aestimandas extensiones. Quare (ut iam notatum est — cfr. n. 56) loqui etiam possumus de regulis metricis, quae alterant extensiones; quae affirmatio definitam significationem sibi vindicat: secus amitterent significationem etiam affirmationes geometriae intrinsecae superficierum (v. n. 72, notam b). Nec desunt adiuncta in quibus (pro regula metrica adhibita) mensurae de extensionibus manifestissime alterant extensiones (cfr. n. 26).

sionis); superat vero capacitatem nostrae imaginationis tridimensionalis fingere imaginem spatiorum tridimensionalium quae curventur respectu quartae dimensionis; *nemo autem quaerit declarare rem claram per rem obscuram* (cfr. n. 62 e, 2).

Aliud dicendum est si agitur de curvatura spatii tridimensionalis homogenei et isotropi : non valemus eam directe nobis repraesentare; possumus vero illam indirecte declarare per analogiam: sicut superficies bidimensionalis curvari potest respectu tertiae dimensionis (quae est externa superficiei et superat eius capacitatem), ita *spatium tridimensionale concipi potest curvum respectu quartae dimensionis ei externae,* quamvis quarta dimensio superet capacitatem entium tridimensionalium.

Hac ratione reapse descriptiones mathematicae spatiorum curvorum (isotroporum) illustrant eorum naturam curvam : introducendo scilicet quartam dimensionem (cfr. n. 48). Consideretur ex. gr. *spatium tridimensionale sphaericum : exhibetur ut limes tridimensionalis cuiusdam hypersphaerae tetradimensionalis, ea ratione qua superficies sphaerica bidimensionalis est limes voluminis sphaerici tridimensionalis ;* in utroque casu longitudines geodeticae entium curvorum referuntur ad radios R qui manent extra entia curva.

Analogiae formales sunt manifestae :

a) Consideretur prius superficies sphaerica spatii euclidei :

1) longitudines linearum geodeticarum (considerentur nominatim meridiani egredientes e polo O coordinatarum) exprimuntur per radium R sphaerae et angulum χ sustentans arcum geodeticum (vertex anguli stat in centro sphaerae) :

$$\varrho = R \cdot \chi$$

2) omnes radii R sphaerae manent extra superficiem sphaericam ;

3) integra longitudo totius lineae geodeticae exprimi potest per duas distinctas formulas :

— formula geometriae sphaericae (formula interna) :

$$l = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \qquad (r = R \cdot \pi/2)$$

refert longitudinem l ad radium curvilineum r iacentem supra sphaeram ;

— formula euclidea :

$$l = 2\pi R$$

refert longitudinem l ad radium R sphaerae, iacentem extra superficiem sphaericam ; unum vero idemque planum (euclideum) continet circulum geodeticum sphaerae et radium R.

b) *Consideretur denique hypersphaera tridimensionalis* (spatium tridimensionale praeditum curvatura) ; instaurantur eaedem relationes et formulae :

1) longitudines linearum geodeticarum (considerentur lineae geodeticae egredientes e polo coordinatarum polarium) exprimuntur per radium R cuiusdam superioris hypersphaerae (tetradimensionalis) et angulum χ sustentantem arcum geodeticum (cuius vertex stat in centro hypersphaerae tetradimen sionalis) :

$$\varrho = R \cdot \chi$$

2) omnes radii R hypersphaerae tetradimensionalis manent extra spatium sphaericum tridimensionale ;

3) Integra longitudo totius lineae geodeticae exprimi potest per duas formulas :

— formula geometriae sphaericae (formula interna) :

$$l = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \qquad (r = R \cdot \pi/2)$$

refert longitudinem circuli l ad eius radium curvilineum r qui extenditur per spatium tridimensionale curvum (cfr. n. 54);

— formula euclidea :

$$l = 2\pi R$$

refert longitudinem lineae geodeticae l ad radium R hypersphaerae tetradimensionalis, qui manet extra spatium sphaericum tridimensionale; unum vero idemque planum hyperspatii tetradimensionalis continet circulum geodeticum et radium R; relatio autem $l = 2\pi R$ manifestat spatium tetradimensionale esse euclideum.

Stat igitur sequens analogia:

a) *Superficies sphaerica est ens geometricum bidimensionale, mersum in spatio tridimensionale;*

— geometria propria huius superficiei (exhibens curvaturam $K =$ Excessus geodet. / Aream) procedit ex peculiari flexione eiusdem superficiei bidimensionalis respectu tertiae dimensionis;

— totum autem spatium tridimensionale est euclideum.

b) *Item: spatium sphaericum tridimensionale est spatium mersum in hyperspatio tetradimensionale; curvatur autem respectu quartae dimensionis;*

— geometria sphaerica spatii tridimensionalis (exhibens curvaturam $K =$ Excessus geodet. / Aream) provenit ex ipsa flexione spatii tridimensionalis respectu quartae dimensonis;

— totum autem spatium tetradimensionale est euclideum.

Non obstante vero manifesta analogia, licet adhuc quaerere an analogia sit mere formalis, et res aliter se habeant in duobus casibus:

a) si agitur de superficie sphaerica bidimensionali: vere ipsa mergitur in spatio superiori tridimensionali, et curvatur respectu tertiae dimensionis; datur denique radius R curvaturae positus extra superficiem. Haec omnia possunt affirmari, quia ea conspicimus.

b) *Si* vero *agitur de spatio sphaerico tridimensionali*, non conspicimus ullum superius spatium tetradimensionale, aut radios curvaturae positos extra spatium tridimensionale; quare haec omnia non possumus cognitione intuitiva affirmare; et *formulae continentes radium R dici possunt satis intelligi si R concipitur ut merum parametrum mathematicum, quod absolvit in formulis par munus* (*sub aspectu mathematico*) *ac radius sphaerae in priori casu.*

Negandum vero est hanc explicationem sufficere ; quare (si agitur de spatio isotropo et curvo) vere requiritur eius peculiaris flexio respectu quartae dimensionis ; et parametrum R, contentum in formulis geometriae sphaericae, vere refert radium hypersphaerae tetradimensionalis.

En argumenta :

1. *Comparentur duae sphaerae, altera spatii euclidei altera spatii sphaerici, exhibentes sequentes notas* (cfr. n. 54) :

	sphaera euclidea	*sphaera spatii sphaerici*	
radius	R	$R\dfrac{\pi}{2}$	R = dimensio fundamentalis spatii non eucl.
curvatura	$+\,1/R^2$	$\dfrac{1}{R^2\cdot\sin^2\dfrac{R\cdot\pi/2}{R}} = +\,1/R^2$	sphaera est ipsum planum ellipticum
superficies	$4\pi\,R^2$	$4\pi\,R^2\cdot\sin^2\dfrac{R\cdot\pi/2}{R} = 4\pi\,R^2$	

Duae sphaerae igitur — praeditae pari curvatura — sunt isometricae ; habent etiam parem superficiem ; quare possunt perfecte mutuo applicari. Per hanc ipsam mutuam applicationem duarum superficierum, contactum acquirunt et comparantur inter se spatium euclideum et spatium sphaericum, nexa cum duabus superficiebus sphaericis quae superpositae sunt.

Quamvis duae superficies sphaericae in unam superficiem (Σ) *coincidant, eorum centra* (*sphaerae euclideae et sphaerae spatii elliptici*) *non coincidunt in unum punctum :* radii enim duarum sphaerarum (R et $R\cdot\pi/2$) sunt diversi ; evolvuntur igitur per vias diversas.* Utrique vero radii sunt orghogoni eidem

* Hanc rem declarant pares relationes quas — dempta una dimensione — exhibent figurae spatii euclidei tridimensionalis.

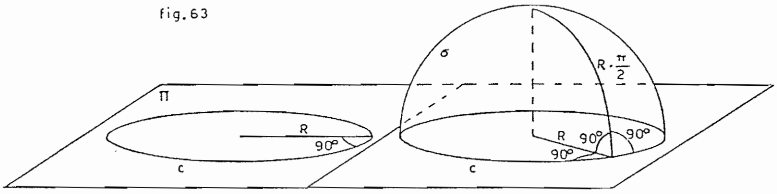
Detracta una dimensione, considerandae iam non sunt superficies

superficiei sphaericae Σ; praeterea discedunt ab uno eodemque puncto superficiei Σ iuxta duas directiones orthogonas inter se: duo enim diametri sphaerae (alter spatii euclidei et alter spatii sphaerici) stant inter se ut segmentum rectum ($2\,R$) et semicirculum ($\pi \cdot R$) quorum extrema sunt communia.*

---

sphaericae (bidimensionales, limitantes volumina), sed circuli (unidimensionales, limitantes areas bidimensionales.

fig. 63



Considerentur (fig. 63) duo circuli omnino aequales inter se, quorum alter limitat portionem plani Π, alter vero limitat semisphaeram σ; radius circuli iacens supra planum est R; radius vero circuli iacens supra sphaeram est $R \cdot \pi/2$.

Duo circuli, utpote aequales inter se, superponi possunt et congruere in unum. Qua superpositione peracta, uni eidem circulo competunt duo diversi radii: alter (r) iacens supra superficiem planam, alter ($r \; \pi/2$) iacens supra superficiem curvam; qui bini radii evolvuntur iuxta duas directiones diversas, orthogonas inter se.

Hae autem relationes ideo dari possunt quatenus superficies plana Π et superficies sphaerica σ (utraeque bidimensionales) merguntur in spatio tridimensionali: hac de causa distingui possunt duae diversae directiones radiorum orthogonae inter se et orthogonae circulo c.

Pares autem condiciones producuntur in spatio tetradimensionali si uni eidemque sphaerae assignari possunt duo distincti radii, utrique orthogoni superficiei sphaericae, et etiam orthogoni inter se.

Nec eluditur argumentatio si quis velit supponere sphaeram euclideam (superficies: $4\pi r^2$; radius r) novo modo flecti cum applicatur sphaerae isometricae non euclideae (eiusdem superficiei et curvaturae) ita ut omnes eius radii augeantur et fiant $r \cdot \pi/2$, et iam non dentur pristini radii euclidei r, sed solum novi radii non euclidei $r \cdot \pi/2$.

Duplici argumento solvitur obiectio:

1) sphaera euclidea nullam novam flexionem acquirit cum applicatur sphaerae non euclideae quae est eiusdem curvaturae et eiusdem extensionis; ea ipsa ratione qua (v. fig. 63) circulus c plani nullo novo modo flectitur cum applicatur circulo aequali sphaerae.

2) Ipsa obiectio postulat nova de causa quartam dimensionem: postulatur enim pro sphaera euclidea talis flexio (qua pariter augentur omnes eius bini radii curvaturae) ad quam nullatenus sufficiunt tres dimensiones spatii euclidei; iamvero altior gradus libertatis in flexione sequitur altiorem numerum dimensionum.

* Argumentum supponit agi de spatiis isotropis; secus, adhibitis duabus regulis metricis diversis iuxta directiones radiorum (ob quas

Requiruntur igitur quatuor dimensiones orthogonae inter se ut spatium ellipticum distingui possit, suis propriis notis, a spatio euclideo : duae dimensiones definiuntur per ipsam superficiem Σ ; accedunt duae distinctae directiones diametrorum (proficiscentium ex uno puncto superficiei Σ) et quae sunt orthogonae tum superficiei Σ tum inter se.

Spatium sphaericum manet quidem tridimensionale, quia intra ipsum non distinguuntur nisi tres dimensiones ad invicem orthogonae ; sed totum hoc spatium curvatur respectu quartae dimensionis, ita ut omnis semigeodetica spatii sphaerici sit verus semicirculus $(\pi \cdot R)$ cuius corda sit segmentum rectum $(2 \cdot R)$; reproducuntur scilicet eaedem condiciones quae habentur in ordine inferiori, in quo superficies sphaerica (bidimensionalis) se exhibet ut curvam respectu tertiae dimensionis : omnes semigeodeticae sphaerae sunt veri semicirculi (πR) quorum extrema coincidunt cum punctis extremis segmenti recti $2\,R$ positi extra superficiem sphaericam (v. n. 48, fig. 55).

Par argumentum institui potest etiam quoad spatium hyperbolicum : comparandae sunt duae sphaerae, altera spatii euclidei altera spatii hyperbolici, quibus competant pares curvaturae et pares extensiones, ita ut mutuo applicari possint et coincidere in unam superficiem Σ. Diversi vero sunt radii eiusdem superficiei Σ, prout consideratur sphaera spatii euclidei aut sphaera spatii hyperbolici ; quare duae series radiorum evolvuntur per vias diversas, quae — simul cum duabus dimensionibus superficiei Σ — postulant quatuor dimensiones.

En exempla sphaerarum quae obtemperant condicionibus requisitis (cfr. n. 54) :

sphaera spatii euclidei		*sphaera spatii hyperbolici*	
radius	$r_{eucl.} = R$ R = dimensio fundam. spatii hyperbolici	$r_{hyp} = R \cdot 0{,}8878$	$\frac{r_{hyp.}}{R} = 0{,}8878$ $\mathrm{Sh.}\frac{r_{hyp.}}{R} = 1$

metricas diversas deficit isotropia respectu dimensionum superficiei sphaericae), obtineri possunt etiam duae diversae mensurae iuxta easdem lineas et intra eadem extrema.

curvatura	$\frac{1}{r^2_{eucl.}} = \frac{1}{R^2}$	$\frac{1}{R^2 \operatorname{Sh}^2 \frac{r_{hyp.}}{R}} = \frac{1}{R^2}$
superficies	$4\pi R^2$	$4\pi R^2 \operatorname{Sh}^2 \frac{r_{hyp.}}{R} = 4\pi R^2$

Notandum.

Pro pari curvatura sphaerarum, inter radios spatiorum elliptici, euclidei et hyperbolici stant sequentes relationes inaequalitatis :

$$r_{ellipt.} > r_{eucl.} > r_{hyperbol.}$$

quae relationes intelliguntur quatenus, in spatiis non euclideis, flexiones superficiei sphaericae superadduntur verae flexioni totius spatii, inferentis iam aliquam curvaturam (positivam aut negativam).

2. *Nonnullae superficies, exhibentes parem geometriam intrinsecam quia praeditae pari curvatura, evolvuntur et flectuntur in modis adeo diversis prout merguntur in spatio euclideo aut non euclideo, ut renuntient flexionem propriam totius spatii non euclidei respectu quartae dimensionis.*

a) *Superficies praeditae curvatura nulla :*

(1) *in spatio hyperbolico : pseudosphaerae.*

Hae superficies (superficies scilicet praeditae curvatura nulla, et isometricae cum plano euclideo) acquirere possunt talem flexionem et positionem mutuam (analogam positioni duarum sphaerarum quae se tangant in uno puncto — cfr. n. 45), quam nullatenus assequi possunt ipsae superficies praeditae curvatura nulla, si supponuntur positae in spatio euclideo : id genus flexionis et consequentes mutuae positiones impossibilia restant (propter ipsam geometriam intrinsecam superficierum) quantumvis superficies ipsae flectantur omnibus in modis, quos sinunt tres dimensiones spatii euclidei.

Cur nova species flexionis competit eisdem superficiebus

(praeditis eadem geometria intrinseca) si inveniuntur in spatio hyperbolico ? Ratio est quia nova flexio competit iam toti spatio hyperbolico ; quae flexio postulat saltem quartam dimensionem externam spatio tridimensionali hyperbolico.

Res ulterius declaratur si consideratur mutua positio (in spatio hyperbolico) orisphaerae et plani hyperbolici, quae se tangant in uno puncto (cfr. n. 45, fig. 52) : modus, quo orisphaera discedit a plano (circa unum punctum contactus) est ille ipse qui (si producendus esset in spatio euclideo) postularet superficiem praeditam curvatura positiva. Quod discrimen referendum est ad diversam flexionem superficierum geodeticarum (« planorum ») in duobus spatiis : si de spatio euclideo agitur, nec spatium nec eius superficies geodeticae flectuntur respectu dimensionis externae ; hac de causa curvatura plani est nulla, et superficies quae separatur a plano circa unum punctum contactus acquirit curvaturam positivam ; si vero agitur de spatio hyperbolico, illud ipsum genus flexionis (quod inducit incrementum positivum curvaturae) separat orisphaeram a superficie geodetica quae ita flexa est (una cum toto spatio) ut ei competat curvatura negativa. Qua de causa incrementum positivum curvaturae (adscribendum recessioni a superficie geodetica), prius quam conferat curvaturam positivam, compensare debet curvaturam negativam superficiei geodeticae et totius spatii ; quod si duae oppositae curvaturae exacte compensantur, earum compositio dat curvaturam nullam (sicut contingit si de orisphaeris agitur).

(2) *in spatio elliptico : superficies Clifford's.*

Repetendae sunt pares animadversiones et argumentationes : inversa vero munera absolvunt superficies geodetica et superficies praedita curvatura nulla : in praecedenti casu spatii hyperbolici, superficies geodetica ita flexa est (una cum toto spatio) ut acquirat curvaturam negativam, et orisphaera separatur a plano (hyperbolico) tali flexione quae inducit incrementum positivum curvaturae ; in praesenti vero casu, superficies geodetica ita flexa est (una cum toto spatio elliptico) ut acquirat curvaturam negativam, dum superficies Clifford sepa-

ratur a plano (elliptico) tali typo flexionis qui inducit decrementum curvaturae (cfr. n. 49, d, fig. 57; n. 49, fig. 58, Notandum).

In utroque casu duae flexiones oppositae mutuo compensantur et producunt superficiem praeditam curvatura nulla.

b) *superficies praeditae curvatura negativa: pseudosphaerae spatii euclidei et plana spatii hyperbolici.*

Superficies praeditae curvatura negativa flecti possunt duobus modis absolute diversis prout inveniuntur in spatio euclideo aut in spatio hyperbolico: pseudosphaerae spatii euclidei, quantumvis flectantur omnibus in modis quos sinit spatium euclideum, numquam possunt ita flecti ut eorum lineae geodeticae fiant etiam lineae geodeticae per spatium tridimensionale.

Eaedem vero superficies, translatae in spatium hyperbolicum, ita flecti possunt ut adhaereant plano hyperbolico (quod gaudeat pari curvatura $-1/R^2$); qua flexione earum lineae geodeticae fiunt lineae geodeticae per spatium tridimensionale hyperbolicum (cfr. n. 40, fig. 45, b).

Undenam procedit hic novus typus flexionis quem sinit spatium hyperbolicum? Generatim maior libertas motuum et flexionum adscribenda est altiori numero dimensionum, sed tum spatium euclideum tum spatium hyperbolicum sunt tridimensionalia; spatium vero hyperbolicum dicendum est flexum respectu quartae dimensionis ita ut eius superficies geodeticae acquirant curvaturam negativam: quae flexio totius spatii efficit etiam ut pseudosphaerae ita flectantur ut earum lineae geodeticae congruant cum lineis geodeticis spatii.

IV

72. Condiciones addendae inter principia Euclidis (dempto postulato V) ut logice sequatur geometria euclidea.

Haec quaestio videri potest supervacanea, cum nemo iam curet emendatam redactionem principiorum Euclidis ita ut,

pro peculiaribus condicionibus additis inter principia, iam necessaria consecutione sequatur aedificium geometriae euclideae. Nova enim forma iam data est principiis geometriae, ita ut ordinatim construi possit non sola geometria euclidea, sed omnis possibilis forma geometriae.

Nihilominus quaestio proposita superflua non est si declarandae sunt nonnullae quaestiones philosophicae agitatae occasione geometriae non euclideae : responsio danda huic quaestioni non solum absolvit tractationem problematis logici geometriae euclideae (cfr. I. II. III), sed etiam parat praemissa ad sequentem quaestionem declarandam (V).

Quae iam dicta sunt satis ostendunt responsionem dandam novae quaestioni : *geometria euclidea distinguitur propter curvaturam nullam totius spatii necnon eius superficierum geodeticarum ; ponuntur igitur sufficientia principia huius geometriae si postulantur eae condiciones quae excludant curvaturam non nullam. Quae condiciones ad duas sequentes revocari possunt :*

1) *spatium sit isotropum ;*

2) *intelligatur exclusa quarta dimensio,* cuius respectu totum spatium tridimensionale (et isotropum) curvari possit.

Prior condicio excludit curvaturam spatii, quae adscribi possit usui unitatum elasticarum, vel (quod ad idem redit) usui regulae metricae, ad quam determinandam concurrant factores physici qui non modo isotropo agant (cfr. nn. 27, 56, 57).

Altera condicio excludit spatia isotropa elliptica et hyperbolica (cfr. n. 71).

Hae positiones plane congruunt cum positionibus geometriae riemannianae, quae exhibet geometriam euclideam ut unam ex tribus possibilibus geometriis spatii isotropi. Cum autem curvatura spatii tridimensionalis (isotropi) sive elliptici sive hyperbolici adscribenda sit flexioni spatii tridimensionalis respectu quartae dimensionis, exclusa hac flexione, non manet nisi geometria euclidea.

Eaedem duae condiciones exprimi possunt etiam sub alia forma, quae tamen vere aequipollens sit.*

---

* *a.* Non raro « directio constans lineae rectae » exhibetur tam-

B. - PROBLEMA CRITICUM

V

73. Novae positiones criticae.

a. De vi criterii evidentiae.

Geometriae non euclideae visae sunt infirmare ipsam capacitatem evidentiae ad nobis comparandam certitudinem : proprietas enim (postulatum V), quam omnes sponte aestimant neces-

---

quam ea proprietas (tacite ab Euclide intellecta) quae, si explicite consideratur, iam infert geometriam euclideam. Sed problema non videtur solvi posse hac una animadversione.

Praetermittenda in primis non est alia condicio circa regulam metricam ; scilicet : extensiones aestimandae sunt sub aspectu mere extensivo et adhibitis unitatibus rigidis ; secus eaedem formae graphicae rectilineae geometriae euclideae componi possunt cum proprietatibus metricis non euclideis (ut ostendunt duae metricae — elliptica et hyperbolica — geometriae proiectivae).

Praeterea « directio constans » non videtur proprietas quae facile et modo univoco definiatur. Si attendimus, ex. gr., ad solam superficiem bidimensionalem sphaericam, directio cuiusvis eius circuli maximi dici potest constans ; nihilominus hae lineae geodeticae clauduntur in seipsas et inferunt geometriam ellipticam ; item dici potest de lineis geodeticis spatii tridimensionalis : non solum petenda est directio constans interna (respectu eiusdem spatii tridimensionalis), sed etiam excludendum est spatium tridimensionale curvari respectu novae dimensionis ei externae ; et sic instaurandae videntur ipsae argumentationes a nobis propositae.

b. En potius alia formula quae apta videtur ad resumendas condiciones inferentes proprietates metricas euclideas :

« Spatium geometricum, ratione habita de *tota* et de *sola* eius extensione, infert regulam metricam euclideam ».

Consideranda est in primis *tota* extensio possibilis spatii, ita ut spatium ipsum non se exhibeat ut limitem particularem spatii altioris ordinis ; secus flexio illius particularis portionis spatii respectu ulterioris dimensionis ei externae inferre potest relationes metricas non euclideas.

Dein regula metrica ita statuenda est ut ratio habeatur de sola extensione, seposito quovis alio factore physico auferente isotropiam mensurarum.

Haec positio videtur fortasse prima fronte non satis definita ; videtur etiam ei contradicere communis affirmatio exhibens spatium ut informe usquedum non introducatur definita regula metrica ; dum in

sariam, reapse necessaria non est; et proprietates contrariae, quae dicuntur evidenter repugnare, non repugnant.

Procul dubio nequit requiri criterium diversum ab evidentia ut assequamur certitudinem; si evidentia enim probanda esset inepta ad hunc finem, hoc non fieret nisi per argumentum evidens; eiurata igitur evidentia, neganda simul esset omnis vera certitudo. Haec positio, si sine exceptione astrueretur, incideret in absurdas contradictiones scepticismi universalis; aliquando vero affirmatur non sine temperamentis, quae videntur cohonestare thesim et illam prudenter exhibere ut consonam naturae nostrae cognitionis, nominatim si consideratur investigatio scientifica nostri temporis: iam nequimus — aiunt — affectare perfectam illam formam, quam Graeci contenderunt dare scientiae, iuxta quam statuendum prius est fundamentum in paucis principiis evidentibus; et dein, per ratiocinium, evidentia paulatim propagatur ex primis principiis ad conclusiones magis remotas. Alia iam dicenda est indoles investigationis: initia stant in nonnullis condicionibus, quae practice admittuntur neque instaurantur inexhaustae inquisitiones de earum vi et certitudine; dein

praesenti dicimus solam extensionem spatii esse formam sufficientem quae — per se solam — introducat definitam metricam.

Non obstantibus vero contrariis praeiudiciis, regula illa metrica non destituitur definita significatione, quamvis (quod libenter agnoscimus) ipsa significatio non satis declarata maneat et confirmata nisi praecedat ampla tractatio et discussio quam persolvimus.

Tantum enim abest ut conceptus de sola extensione insufficiens sit ad fundandas definitas proprietates geometricas (et quidem proprietates metricas) ut ipse constituat fundamentum sine quo corruunt omnes proprietates metricae intrinsecae superficierum, de quibus agunt geometriae gaussianae et riemanniana. Etenim: hae geometriae exhibent curvaturam superficierum (et consequenter omnes earum proprietates metricas) tam quam proprietatem intrinsecam uniuscuiusque definitae superficiei; supponit vero regulam metricam aestimare *meram extensionem* entis geometrici; secus:

— quaevis curvatura — et consequenter quaelibet geometria — tribui potest uni definitae superficiei (ex. gr.: plano, sphaerae, toro, cuilibet cyclidi — cfr. nn. 28, 29; 42, notandum; 44, 49);

— eadem geometria statui potest supra superficies, quae iam exhibitae sint (ad normam geometriae gaussianae) ut praeditae diversa curvatura et diversa geometria intrinseca (ex. gr. planum, sphaera et cyclides; sphaerae praeditae radio diverso; cfr. nn. supra indicatos; nominatim n. 42, notandum).

paulatim, accedentibus novis argumentis, positiones fiunt tutiores et etiam novae conclusiones attinguntur vere idoneae ad referenda et interpretanda phaenomena; quae conclusiones tamen (ad opinionem nonnullorum) manent obnoxiae possibili revisioni, et omnis discursus manet apertus.*

Alii auctores benignius iudicant de possibili firma vi conclusionum; evidentia vero — notant — non pertinet principiis investigationis: non est nisi ultimus fructus.

Aliae affirmationes nonnunquam proferuntur (ratione nominatim habita de geometria non euclidea), quae criterium evidentiae spernunt, nec ei videntur committere ullum munus in investigatione scientifica: dicuntur evidentes — aiunt vel doctissimi viri — ideae illae quas traditum magisterium et consuetudo reddidit familiares; sed humana cognitio incrementum accipit ab ideis novis. Consuetissimum etiam est praestantiores progressus scientiarum secutos esse ideas novas et subversivas, quibus initio non parum restitum est quia iudicatae sunt absurdae, utpote contrariae intuitionibus evidentibus; sic, ex. gr., contigit quoad ideas de forma sphaerica terrae et de antipodibus, de systemate heliocentrico opposito « evidenti » systemati geocentrico, de ipsa synthesi Newtoniana, de primis fundamentis theoriae relativitatis ...

Hae et similes assertiones tangunt quaestiones non simplices, quae sub variis aspectibus declarandae sunt. *Nostrum autem non est de his omnibus disserere;* nominatim declarandum nobis non est ipsum problema criticum, et genuina idea evidentiae, et eius variae formae, aut rationes quibus irrepere potest error vel fucata evidentia. *Opportune vero notabimus problema de geometriis non euclideis non fuisse tale, quod deberet movere tam profunda dubia de vi ipsius criterii evidentiae: agitur enim de problemate, quod diu insolutum mansit usquedum defuit evidentia; solutum tandem est cum evidentia facta est.*

---

* v. Philosophiam idoneistam Ferdinandi Gonseth, nominatim *Philosophie neo-scholastique et philosophie ouverte*, Paris, Presses Universitaires de France 1954 — cfr. DUMAS, *La philosophie idoneiste de F. Gonseth*, Pontif. Univ. Greg. — N. B. Hic A. potissimum argumentum deduxit ex geometriis non euclideis.

Utramque assertionem probat historia huius controversiae scientificae :

1) *Problema insolutum mansit usquedum defuit evidentia.*
Notentur ad hunc propositum :
— incertitudo ipsius Euclidis (cfr. n. 1) ;
— iterata studia plurium auctorum eliminandi postulatum V Euclidis (cfr. n. 2) ;
— irrita tentamina demonstrandi directe positionem euclideam, et laboriosa et incerta studia producendi demonstrationem indirectam (quod dicendum est etiam de pseudodemonstratione Patris Saccheri, quae continet erroneas considerationes circa puncta non clare cognita ab auctore — cfr. nn. 3, 4).
— diuturna discussio — ad 40 annos protracta — quae occupavit mentem summi mathematici Gauss (cfr. n. 6) ;

2) *Problema solutum est cum omnia eius elementa facta sunt evidentia* (cfr. Q. I).

N.B. Non omnes solutiones problematis pari vi gaudent ; pari autem gressu crescit vis conclusionum et evidentia, seu lux qua magis ac magis omnes aspectus quaestionis illuminati sunt (cfr. n. 69).

Dices fortasse vulgum ignorare haec omnia ; nihilominus sponte iudicat necessariam positionem euclideam et reicit ut impossibiles positiones contrarias.

Plures obviae causae hanc rem explicant ; unam vero notemus : quoties iudicatur de necessitate postulati V Euclidis (etiam sponte et non sine matura reflexione) semper tacite supponuntur duae illae condiciones (unitates mensurae rigidae — defectus quartae dimensionis cuius respectu spatium tridimensionale curvetur) quae revera exigunt geometriam euclideam (cfr. n. 72) ; *quare nullus error reapse fit ; potius laudanda est felix dispositio intellectus et imaginationis hominum, quae, in re tam ardua, naturaliter congruit cum recta solutione.*

b. Methodus axiomatica et formalis.

1. Geometria abstracta.

Theoria euclidea de parallelis (quamvis nonnisi hyperbolice dicta sit — a Gauss — « ignominiosa pars » mathesis, et quamvis reapse non constituerit ullum peccatum logicum propter quod detrahenda sit fiducia naturali intuitioni humanae) tamen *non est theoria omnibus punctis absoluta : quare severior critica nova methodo redegit principia geometriae, minorem partem relinquendo intuitioni.*

Notanda in primis est severior methodus axiomatica.

Methodus axiomatica non est nova : ipse Euclides eam secutus est ; in eo stat quod variae notiones non cumulantur sine ordine, sed statuuntur in primis principia (« axiomata ») ex quibus cetera hauriuntur logica consecutione. Profundum vero discrimen distinguit novam a vetere methodo.

Axiomatica classica adhibet conceptus primos, quorum significatio percipitur modo intuitivo ; circa ipsos conceptus admittuntur nonnullae propositiones ut evidentes, quae demonstratione non indigent. Agitur de axiomatica, quae continet et exprimit conceptus.

Axiomatica nova, seu pura, evacuat id genus significationis. Nullum principium relinquitur tacite intellectum. Obiecta de quibus agit possunt etiam nominibus appellari, sed ideae de ipsis retinendae consistunt unice in mutuis relationibus quae explicite asseruntur stare inter varia elementa systematis ; quae elementa possunt etiam meris symbolis (A, B, C . . .) denotari.

Iam non distinguuntur « axiomata » et « postulata » pro diversa indole propositionum ; sed omnes primae positiones, statuentes basim systematis, sunt pari iure tot « axiomata » (quae etiam dici possunt « postulata », seu condiciones requisitae). Neque axiomata habenda sunt ut per seipsa evidentia : sunt tot positiones primae ; dein videbitur quid ex ipsis logica deductione erui possit. Nec subsequentia ratiocinia ullas proprietates supponere debent praeter relationes explicite enunciatas per axiomata.

Construitur hac ratione systema hypothetico-deductivum. Si de geometria agitur, construitur « geometria abstracta ».

Theoria hac ratione delineata per systema axiomatum potest tandem interpretationem admittere, et etiam plures diversas interpretationes : quaevis enim entia, quae servent inter se eas mutuas relationes quae axiomata postulant inter elementa A, B, C . . . systematis, constituunt pari iure tot interpretationes theoriae.

N.B. *Non modo dissimili egimus ad interpretandas propositiones geometriae non euclideae* (cfr. n. 69) ; quod probat (inter alia argumenta) huiusmodi methodum abstractam non sine fructu institui : nominatim probavimus postulatum V Euclidis non posse demonstrari ratione habita de illis solis proprietatibus quas principia Euclidis explicite enunciant.

2. Systemata formalia.

Redactiones adhuc magis abstractae de fundamentis mathematicae institutae sunt cum de ipsis fundamentis necessarium fuit instituere severius examen criticum.

Quae necessitas orta est ex ipsa perfectiori evolutione matheseos : collecta enim sunt nonnulla paradoxa quae in dubium revocabant nonnullos processus mathematicos ; quare viguerunt novae investigationes circa fundamenta mathematicae.

Idonea instrumenta technica fuerunt :

— *methodus axiomatica :* cuius gratia tota theoria perpendi potest prout continetur in suis principiis ;

— *logistica :* nova forma logicae, cuius methodi analogiam exhibent cum operationibus mathematicis ; dum logica classica utitur ratiociniis, quae valde accedunt ad consuetos discursus naturales et adhibent operationes deductivas, quarum significatio intuenda est, nova logica iam non attendit ad conceptus et tota est in perficiendis operationibus iuxta definitas regulas. Cito logistica induit etiam formam axiomaticam ; sed etiam ista forma confirmat characterem generalem horum processuum, qui eliminant intuitiones de conceptibus.

Methodus nova, quae his et aliis auxiliis constructa est, dicitur methodus formalis :

Directe considerantur ea quae denominata sunt « systemata formalia » : theoria, quae analysi subicienda est, exprimitur per quoddam « systema formale », quod est velut materialis imago theoriae ; est obiectum quoddam, plane definitum (constitutum symbolis, obnoxiis certis regulis manipolationis), cuius structura conspicitur et potest penitus examinari.

Studium igitur de proprietatibus cuiusdam theoriae vertitur in studium de proprietatibus systematis formalis.

Non sunt nobis amplius declaranda sive systemata formalia sive eorum usus et interpretationes ; sed *innuendae sunt duae quaestiones quas sibi posuerunt ipsi auctores qui excoluerunt scientiam de fundamentis mathematicae :*

— *quousque theoriae mathematicae repraesentari possunt per systemata formalia ?*

— *quibus methodis perpendi possunt proprietates systematum formalium ?*

Iamvero ipsa natura systematum formalium responsionem dedit his quaestionibus, manifestando internas limitationes methodi : si methodus pluribus in modis eliminat intuitionem de conceptibus, hoc nequit sine mensura fieri.

3. Interni limites formalismi et necessaria pars intuitionis.

Plures auctores statuerunt etiam theoremata circa necessarias et internas limitationes methodi formalis. Primum et praestantius inter haec theoremata illud est quod Gödel demonstravit anno 1931.

Ipse usus systematum formalium postulat considerationes intuitivas ; sed istae intuitiones iam non spectant conceptus abstractos et affirmationes theoriae, sed rem sensibus subiectam : ipsum scilicet systema formale, in quod versa est theoria.

Sed theoremata exigunt alias intuitiones, quae nequeunt eliminari :

Quoties agitur de theoria non speciatim simplici, nequit

ipsa ex toto verti in systema formale ; sed huiusmodi exemplaria symbolica aliquando nequeunt repraesentare nonnullos conceptus intuitivos theoriae, aliquando nequeunt repraesentare adaequate nexus logicos deductivos qui partem habent in theoria (adhuc non versa in systema formale, sed retinente suam nativam formam intuitivam).

Semper denique retinenda est relatio significationis quae ad invicem refert exemplar symbolicum et theoriam repraesentatam : non manet propterea pura intuitio symboli, sed etiam interpretatio signi prae oculis habenda est.

Hae methodi et considerationes positae non sunt propter problema geometriae non euclideae, sed occasione problematis analogi (quamvis magis ampli et profundi) : in utraque investigatione, altera geometrica altera mathematica, nimia fiducia concessa erat intuitioni, et quaedam pseudoevidentiae retineri non poterant ut criterium veritatis vel totius veritatis. Severiora vero examina critica ostenderunt intuitionem et evidentiam (evidentia semper vertitur circa intuitiones) non posse de medio tolli : attento vero examine critico considerandae sunt intuitiones quibus investigatio iure innititur.

Ad nostrum problema geometricum quod attinet, si nimia fiducia concessa erat illi intuitioni quae visa est legere in figuris geometricis necessitatem postulati V euclidei, vanum esset fiduciam ponere in methodo quae ex toto supprimat intuitionem (mutilanda non est nostra cognitio ut eius vis percipiatur) : reapse *intuitio non parvam partem retinuit etiam ut construeretur geometria non euclidea. Sequentia puncta considerentur :*

(a) *Prima basis, cui innixa est constructio geometriae non euclideae, est ipsa geometria euclidea*, quae agnita est stare sine exceptione supra orisphaeras : considerationes autem de orisphaeris (aut de stellis rectarum et planorum, quas orisphaerae secant iuxta angulum rectum) persolutae sunt iuxta methodum intuitivam geometriae elementaris (cfr. n. 10, a).

(b) *Aliud punctum basis geometriae non euclideae stat in trigonometria sphaerica, quae potuit evolvi* sine usu postulati V

Euclidis : evoluta autem est *iuxta eandem methodum intuitivam geometriae elementaris* (cfr. n. 10, b, c).

(c) *Interpretatio spatiorum* (tridimensionalium) *non euclideorum* (quae necessario requirebantur ut excluderetur quaevis interna contradictio, ratione habita de omnibus dimensionibus spatii et de proprietatibus non solum metricis sed etiam topologicis): hae interpretationes *sub oculos ponunt intuenda entia geometrica extensa* ; et prae oculis retinendae sunt etiam relationes significationis quae stant inter signa repraesentantia et res repraesentatas (spatia non euclidea et eorum proprietates) (cfr. P II, Cap. III).

(d) *Systemata mere analytica geometriae Riemannianae nondum solvunt problema* de geometria non euclidea (tridimensionali) *si spatia geometrica retinere debent etiam proprietatem intuitivam extensionis :* ut talia spatia appareant ut praedita omni interna cohaerentia, non sufficiunt solae formulae geometriae differentialis, sed accedere debent earum interpretationes per entia extensa (considerandae autem sunt non solae proprietates metricae differentiales, sed etiam proprietates topologicae totius spatii — quae considerationes ducunt ad definiendas condiciones sub quibus spatia tridimensionalia isotropa non euclidea dari possunt — cfr. n. 71).

VI

74. Estne peculiaris geometria — euclidea aut non euclidea — anteponenda ceteris?

Geometria euclidea, per duo millennia, sola et sine aemulis dominata est ; cum autem geometria non euclidea producta est, controverti etiam coepit (et adhuc controvertitur) de prioribus partibus alterutrae geometriae agnoscendis.

Falsae vero interpretationes facile dari possunt cuivis sententiae de hac re, quia quaestio non sub uno tantum aspectu considerari potest, et diversis aspectibus etiam diversae responsiones competunt.

En nonnulli et praecipui aspectus quaestionis qui distingui possunt :

a. Ordo chronologicus.

Si ad ordinem chronologicum attendimus, geometria euclidea non solum dicenda est prior quia longe prius producta est, sed etiam quatenus constituit systema de cuius interna cohaerentia prius iudicari potuit (cfr. n. 12, b).

Interna congruentia geometriae euclideae, iam in tuto statuta, sivit ut ipsum spatium euclideum adhiberetur ad construendas interpretationes (cohaerentes) ceterarum geometriarum.

b. Ordo logicus (geometria absoluta).

In ordine logico prius dicendum est genus superius. Si de geometria agitur, superius genus habetur cum pauciora sunt principia constituentia fundamentum systematis ; cui condicioni respondet systema geometricum (« geometria absoluta ») constructum sine auxilio ullius hypothesis circa parallelas. Geometria autem, statuta supra hanc basim, exhibet peculiarem magnitudinem constantem k (significationem habentem cuiusdam unitatis fundamentalis et velut naturalis variorum systematum), quae relationem ponit inter formam et magnitudinem figurarum : quae condicio excludit generatim figuras similes et postulat geometriam non euclideam ; geometria euclidea apparet tantum ut casus limes, valde particularis, respondens dimensioni infinitae tributae constanti k (cfr. nn. 6 ; 7 ; 8 ; 10, c).

c. Ordo infinitesimus et hyperspatia.

Geometria euclidea, quae constituit limitem ad quem accedunt geometriae non euclideae cum tendit ad infinitum earum dimensio fundamentalis k, est etiam geometria quae viget intra ambitus infinitesimos (cfr. n. 11, b).

Hyperspatiis (praeditis plus quam tribus dimensionibus) competere possunt proprietates metricae sive euclideae sive

non euclideae. Quaedam relationes vero notari possunt inter geometrias spatii praediti n dimensionibus et hyperspatii superioris ordinis praediti $n + 1$ dimensionibus (quas relationes notamus tantum quoad spatia isotropa). Dari potest spatium non euclideum (tum ellipticum tum hyperbolicum) quod sit limes curvus hyperspatii euclidei ; spatium vero euclideum (cuius lineae geodeticae sint infinitae) nequit esse pars hyperspatii non euclidei elliptici, sed solum hyperspatii hyperbolici.

d. Ordo physicus.

Si geometria acquirit significationem physicam, ita ut factores physici (praeter extensionem) partem habeant in constituenda regula metrica, obtinetur generatim geometria non euclidea, et quidem sub forma generaliori, quae neque infert isotropiam systematis. Talis est character magis generalis spatiorum geometriae riemannianae ; spatia isotropa non constituunt nisi casus peculiares ; tandem intra infinitam seriem spatiorum isotroporum, nonnisi unus casus (pro quoque definito numero dimensionum) est euclideus.

C. - PROBLEMA ONTOLOGICUM

VII

75. Potestne geometria dici vera? Quaenam?

Notavimus iam nonnulla iudicia diversa ipsorum mathematicorum et physicorum (cfr. n. 55), quarum alia negant attributum veritatis competere posse entibus geometricis (nonnisi ratione elaboratis), alia vero simpliciter affirmant spatium esse non euclideum. Si negligimus diversas rationes philosophicas concipiendi veritatem (considera nominatim sententiam Poincaré et ideas Eddington) nulla vera oppositio datur inter varias affirmationes mathematicorum et physicorum ; notandae tantum sunt diversae significationes quae tribuuntur iisdem vocibus ; iamvero tum subiectum illorum iudiciorum (spatium geometricum) tum attributum (verum) recipiunt significationes diversas.

Si « spatium geometricum » accipitur ut ens mere abstractum, iure loquimur de sola eius interna cohaerentia et non de eius veritate. *Si* vero *« spatium geometricum » induit significationem physicam* (quatenus lineae geodeticae spatii geometrici acquirunt significationem linearum naturalium) *iure loqui possumus de eius conformitate aut non conformitate cum natura rerum, et propterea iure quaerimus utrum systema geometricum sit necne verum ;* quo in casu, attributum « verum » significat non solum internam cohaerentiam logicam systematis, sed etiam eius congruentiam cum mundo physico ; nominatim congruere debent internae relationes metricae systematis geometrici et relationes metricae quae stant circa homologa entia physica. *Quae congruentia nihilominus adhuc dupliciter intelligi potest : perfecta aut mere approximata ; iamvero nihil prohibet quominus systema quoddam geometricum dicatur respondere verae naturae mundi physici etiamsi non detur nisi quaedam congruen-*

tia approximata ; analoga ratione dicimus formam sphaericam esse formam terrae, quamvis congruentia non sit nisi valde imperfecta, tum propter diversas altitudines marium, vallium et montium, tum propter depressiones polares. Notemus potius, ad nostrum casum quod attinet, congruentiam tantum approximatam dari posse duplici de causa : sive propter condiciones veras mundi physici (discrepantes a formis perfectis formularum mathematicarum), sive propter condiciones non veras, sed fictas, tributas universo physico cum densitas materiae et radiationum supponitur uniformiter distributa et praedita perfecta isotropia. *Non obstantibus vero omnibus his incongruentiis inter exemplar geometricum et formam universi physici, iure etiam loqui possumus de eorum congruentiis, et propterea etiam de veritate approximata cuiusdam geometriae.*

Hisce declarationibus praemissis, plura puncta iam tractata respondent praesenti quaestioni et opus non est ut dicta repetantur ; recolantur potius quae notata sunt sub nn. 57, 61, 62 e, 66, 67, 68, 71.

Duas animadversiones addamus :

1) *Iudicia de veritate cuiusdam geometriae* (seu de eius congruentia cum mundo physico) *diversa et etiam opposita esse possunt pro variis considerationibus quae de ipso mundo physico ponuntur ;* spectare enim possunt :

— limitatos ambitus consuetorum experimentorum : quo in casu stat congruentia cum geometria euclidea, quae etiam hodie adhibetur ad describenda phaenomena physica ;

— phaenomena astronomica : praestat tunc geometria non euclidea relativitatis generalis, si lineae geodeticae exprimere debent traiectorias naturales radiorum et corporum. In hoc ipso casu, etiam hodie significatione non destituitur positio Henrici Poincaré, qui notavit sine differentia adhiberi posse unum aut alterum schema geometricum ad eandem rem describendam, opportune aptatis expressionibus legum physicarum : congruit scilicet geometria non euclidea cum mundo physico si leges physicae ita describuntur ut radii et corpora dicantur percurrere lineas geodeticas ; congruere etiam potest geometria euclidea si aliter describuntur leges physicae, et traiectoriae

naturales radiorum et corporum non dicuntur constituere lineas geodeticas; sed haec positio — etsi significatione non destituta — iam in desuetudinem venit.

— problema cosmologicum: notanda est ad hunc propositum animadversio sequens.

2) *Si de problemate cosmologico agitur, quaestio de forma universi et consequenter de geometria quae illam exprimat adhuc manet aperta* (cfr. n. 68).

LIBRI UTILES QUI CONSULANTUR

ENRIQUEZ F., *Conferenze su la geometria non euclidea.* - Bologna - Zanichelli - 1958.

BONOLA R., *Sulla storia della parallele e sulle geometrie non euclidee.* (Articolo incluso in « Questioni riguardanti le matematiche elementari » - raccolte da Enriquez). - Bologna - Zanichelli: 3° ediz. 1923-27.

FANO G.,*Geometria non euclidea - Introduzione geometrica alla Teoria della Relatività.* - Bologna - Zanichelli, 1935.

HILBERT D., *Grundlagen der Geometrie.* - Berlin - 1930.

STÄCKEL-ENGEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss.* - Leipzig, 1895.

SOMMERVILLE D. M. Y., *The elements of non euclidian geometry.* - London, 1918.

CASTELNUOVO G., *Spazio e Tempo.* - Bologna Zanichelli.

EINSTEIN A., *Ueber die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie.* - Braunchweig 1921.

— Vers. angl. London-New York 1921; gall. Paris 1921; hisp. Toledo 1925; ital. Bologna 1921.

EDDINGTON A. S., *Space, Time and Gravitation.* - Cambridge 1920.

— *Space Temps et Gravitation.* - Paris - Hermann 1921.

METZ A., *Temps - Espace - Relativité.* - Paris - Beauchesne.

ABELÉ-MALVAUX, *Vitesse et Universe relativiste.* - Paris - S.E.D.E.S. 1954.

EINSTEIN-LORENTS-MINKOWSKI-WEYL, *The principle of Relativity.* Dover Publications, Inc.

KOPFF A., *Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie.* Leipzig 1921.

— *I Fondamenti della Relatività Einsteiniana* (con scritti di vari Autori sul valore e interpretazione della teoria). - Hoepli - Milano 1923.

AUTORI VARI: *Cinquant'anni di relatività.* - Firenze 1955.

PAULI W., *Relativitätsthorie.* - Teuber - Leipzig, 1922.

— *Teoria della relatività.* - Boringhieri, 1958.

COUDERC P., *L'expansion de l'Univers* - Presse Universtaire de France 1950.

ARCIDIACONO V., *Come si evolvono i cieli* (2 Vol) - Rizzo-Neavo - Messina.

WHITROW G. J., *The structure and evolution of the universe.* - Hutchinson - London - 1959.

LADRIÈRE J. *Les limitations internes des formalismes.* - Louvain: Nauwelaerts - Paris: Gauthier-Villars, 1957 (Collection de logique mathématique).

INDEX

PARS II

DE SPATIIS NON EUCLIDEIS REPRAESENTATIS IN SPATIO EUCLIDEO